Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Übungsblatt mit Lösungsvorschlag 7

Aufgabe 7.1 (Erforderliche Auswertung)

Sei $P = \langle$**function** *zero* ..., **function** *plus* ..., **function** *times* ..., **function** *inner* ..., **function** *outer* ...$\rangle$ mit den Funktionsprozeduren wie in Übung 2.2.1.
Bestimmen Sie zu t jeweils alle Positionen π mit $t \lrcorner_P \pi$:

(a) $t = times(0, outer(0))$,

Lösungsvorschlag:

ε

(b) $t = times(outer(0), 0)$,

Lösungsvorschlag:

$\varepsilon, 1$

(c) $t = times(succ(0), outer(0))$,

Lösungsvorschlag:

$\varepsilon, 2$

(d) $t = eq(inner(0), outer(0))$,

Lösungsvorschlag:

$\varepsilon, 1, 2$

(e) $t = if_{nat}(eq(inner(0), inner(0)), 0, 0)$.

Lösungsvorschlag:

$\varepsilon, 1, 11, 12$

Aufgabe 7.2 ($COND(t, \pi)$ bestimmen)

Sei

$$\begin{array}{rl} t = & \textbf{if}\ (\textbf{if}\ x\ \textbf{then}\ \mathsf{true}\ \textbf{else}\ \textbf{if}\ z\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ y\ \textbf{fi}\ \textbf{fi}) \\ & \quad \textbf{then}\ z \\ & \quad \textbf{else}\ \mathsf{false} \\ & \textbf{fi}. \end{array}$$

Bestimmen Sie $t|_\pi$ und $COND(t, \pi)$ für alle $\pi \in Occ(t)$.

Lösungsvorschlag:

π	$t\|_\pi$	$COND(t,\pi)$
ε	t	$TRUE$
1	$if(x, true, if(z, x, y))$	$TRUE$
11	x	$TRUE$
12	$true$	$x \equiv true$
13	$if(z, x, y)$	$x \equiv false$
131	z	$x \equiv false$
132	x	$x \equiv false \wedge z \equiv true$
133	x	$x \equiv false \wedge z \equiv false$
2	z	$if(x, true, if(z, x, y)) \equiv true$
3	$false$	$if(x, true, if(z, x, y)) \equiv false$

Aufgabe 7.3 (Terminierungsanalyse)

Sei die Funktionsprozedur F_{funny} definiert durch

function $funny(x : nat) : nat \;\Leftarrow$
  if $x = 0$
    then M
    else if $funny(x-1) = N$
      then K
      else $funny(x+1)$
    fi
  fi.

Beweisen oder widerlegen Sie für alle $M, N, K \in \{0,1\}$ die Aussagen

- F_{funny} terminiert *call-by-name*,
- F_{funny} terminiert *call-by-value*,

Lösungsvorschlag:

Fall $M = N = K = 0$**:** F_{funny} terminiert cbv.

cbv: Seien $q \in \mathcal{T}(\Sigma)_{nat}, \theta = \{x/q\}, \gg := >_{\mathcal{T}}$. Offenbar ist ein Fixpunkt ϕ definiert durch $\phi(x) = 0$.

$\pi = 311$**:** $R_{funny}|_\pi = funny(x-1)$
$D(\phi) \models COND(\theta(R_{funny}), \pi) \Rightarrow q \neq 0 \Rightarrow q = 1 + q' \Rightarrow q \gg D(\phi)(\theta(x-1)) = D(\phi)(q-1) = q'$

$\pi = 33$**:** $R_{funny}|_\pi = funny(x+1)$
$D(\phi) \models COND(\theta(R_{funny}), \pi) \Rightarrow q \neq 0 \wedge 0 \neq 0$ wegen $\phi(x) = 0 \Rightarrow$ Bedingung nie erfüllt

cbn: cbn-Terminierung folgt mit Satz 3.1.9.(i) aus cbv-Terminierung.

Fall $M = N = 0, K = 1$ **oder** $M = N = 1, K = 0$**:** F_{funny} terminiert nicht cbn: Seien ϕ ein Fixpunkt, $q_1 = 2$, $\sigma_1 = \{x/2\}, \pi_1 = 33$ $\gg$ eine fundierte Relation, $q_2 = 3$, $\sigma_2 = \{x/3\}, \pi_2 = 311$. Dann gilt $D(\phi)(q_1) \gg D(\phi)(\sigma_1(x+1)) = D(\phi)(q_2) \gg D(\phi)(\sigma_2(x-1)) = D(\phi)(q_1)$. Also kann $\gg$ nicht fundiert sein.

Fall $M = 0, N = 1$ **oder** $M = 1, N = 0$**:** F_{funny} terminiert nicht cbn. Beweis wie zuvor, wähle $q_1 := 1, q_2 := 2$

Fall $M = N = K = 1$**:** F_{funny} terminiert cbv. Beweis wie im ersten Fall, aber mit Fixpunkt $\phi(x) = 1$ und Gegenbeispiel $\phi(x) = 0$.