Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Übungsblatt mit Lösungsvorschlag 4

Aufgabe 4.1 (Flache Halbordnungen)

Sei $(E_i, \sqsubseteq_{E_i})_{1\leq i\leq n+1}$ eine Familie flacher Halbordnungen mit $\perp_{E_i}$ als jeweils kleinstem Element, sowie $\phi \in \{E_1 \times \ldots \times E_n \to E_{n+1}\}$ mit $n \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $n = 0$, dann ist ϕ monoton.

Lösungsvorschlag:

folgt für $n = 0$ aus (e).

(b) Wenn $n = 1$, dann ist ϕ monoton gdw. $\phi(\perp_{E_1}) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1) = e$ für ein $e \in E_{n+1}$ und alle $e_1 \in E_1$ gilt.

Lösungsvorschlag:

folgt für $n = 1$ aus (e), da $\phi(\perp_{E_1}) \in E_2$.

(c) Falls $n > 1$ und ϕ monoton ist, gilt entweder $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1, \ldots, e_n) = e$ für ein $e \in E_{n+1}$ und alle $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$.

Lösungsvorschlag:

Sei $n > 1$ und ϕ monoton.

Fall $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) = \perp_{n+1}$: $\Rightarrow$ Behauptung trivialerweise erfüllt

Fall $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) \neq \perp_{n+1}$: (*)

$$\begin{array}{lll}
 & \forall(e_1,\ldots,e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n.(\perp_{E_1},\ldots,\perp_{E_n}) \sqsubseteq (e_1,\ldots,e_n) & \text{Monotonie} \\
\Rightarrow & \phi(\perp_{E_1},\ldots,\perp_{E_n}) \sqsubseteq_{n+1} \phi(e_1,\ldots,e_n) & \text{Voraussetzung (*) und } \sqsubseteq_{n+1} \text{ flach} \\
\Rightarrow & \phi(\perp_{E_1},\ldots,\perp_{E_n}) = \phi(e_1,\ldots,e_n) & \phi(\perp_{E_1},\ldots,\perp_{E_n}) \in E_{n+1} \\
\Rightarrow & \exists e \in E_{n+1}.\phi(e_1,\ldots,e_n) = e &
\end{array}$$

(d) Die Umkehrung zu (c) gilt nicht. Also kann ϕ für $n > 1$ so gewählt werden, dass $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) = \perp_{E_{n+1}}$ gilt und ϕ nicht monoton ist.

Lösungsvorschlag:

Wähle $n = 2, E_1 = E_2 = \{\perp, *\}, \phi : (\perp,\perp) \mapsto \perp, (*,\perp) \mapsto *, (\perp,*) \mapsto *, (*,*) \mapsto \perp$.

ϕ ist offensichtlich nicht monoton.

(e) ϕ ist monoton gdw. für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und für alle $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ entweder $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \phi(e_1, \ldots, e_n)$ gilt.

Lösungsvorschlag:

„$\Longrightarrow$“ Sei ϕ monoton, wähle $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig.

Fall $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \perp_{E+1}$**:** die Behauptung ist erfüllt

Fall $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) \neq \perp_{E+1}$**:** (*)

$$\begin{array}{rlcll} & (e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) & \sqsubseteq_{E_{n+1}} & (e_1, \ldots, e_n) & \phi \text{ monoton} \\ \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) & \sqsubseteq_{E_{n+1}} & \phi(e_1, \ldots, e_n) & \sqsubseteq_{E_{n+1}} \text{ flache Halbordnung, (*)} \\ \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) & = & \phi(e_1, \ldots, e_n) & \end{array}$$

„$\Longleftarrow$“ Seien $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\forall e_1, \ldots, e_n \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\begin{array}{llcl} \text{entweder} & \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) & = & \perp_{n+1} \\ \text{oder} & \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) & = & \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \end{array}$$

zu zeigen: ϕ ist monoton.

$$\begin{array}{rl} & \text{Seien also } (e_1, \ldots, e_n), (d_1, \ldots, d_n) \text{ beliebig mit } (e_1, \ldots, e_n) \sqsubseteq (d_1, \ldots, d_n) \\ \Rightarrow & \forall i \in \{1, \ldots, n\} e_i \sqsubseteq_{E_i} d_i \\ \underbrace{\Rightarrow}_{E_i \text{ flach}} & \forall i \in \{1, \ldots, n\} e_i = d_i \text{ oder } e_i = \perp_{E_i} \text{ (1.).} \end{array}$$

Fall $\phi(e_1, \ldots, e_n) = \perp_{E_{n+1}}$**:** $\Rightarrow \phi(e_1, \ldots, e_n) \sqsubseteq_{E_{n+1}} \phi(e_1, \ldots, e_n)$, denn $\perp_{E_{n+1}}$ ist kleinstes Element.

Fall $\phi(e_1, \ldots, e_n) \neq \perp_{E_{n+1}}$**:** mit Voraussetzung

$$\Rightarrow \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \qquad (2.)$$

Sei $m \leq n$. m-fache Anwendung von (1.) ergibt

$$\begin{array}{rll} & (e_1, \ldots, e_n) = (d_1, \ldots, d_{j_1-1}, \perp_{j_1}, d_{j_1+1}, \ldots, d_{j_m-1}, \perp_{j_m}, d_{j_m+1}, \ldots d_n) & \\ \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_n) & \\ = & \phi(d_1, \ldots, d_{j_1-1}, \perp_{j_1}, d_{j_1+1}, \ldots, d_{j_m-1}, \perp_{j_m}, d_{j_m+1}, \ldots, d_n) & (2.) \\ = & \phi(d_1, \ldots, d_{j_1-1}, d_{j_1}, d_{j_1+1}, \ldots, d_{j_m-1}, \perp_{j_m}, d_{j_m+1}, \ldots, d_n) & \\ & \vdots & m-1\text{-mal (2.)} \\ = & \phi(d_1, \ldots, d_{j_1-1}, d_{j_1}, d_{j_1+1}, \ldots, d_{j_m-1}, d_{j_m}, d_{j_m+1}, \ldots, d_n) & \\ = & \phi(d_1, \ldots, d_n) & \\ \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_n) = \phi(d_1, \ldots, d_n) & \sqsubseteq_{n+1} \text{ reflexiv} \\ \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_n) \sqsubseteq_{n+1} \phi(d_1, \ldots, d_n) & \end{array}$$

Aufgabe 4.2 (strikte Funktionen)

Bestimmen Sie alle strikten Funktionen der $\Sigma(\text{BM})$-Algebra D_{BM} (vgl. Übung 2.3.5.(i)).

Lösungsvorschlag:

- $\delta_{\text{succ}}, \delta_{\text{pred}}, \delta_{\text{eq}}$ sind strikt.

- Für $\delta_0, \delta_{\text{true}}, \delta_{\text{false}}$ ist strikt nicht definiert.
- δ_{if} ist nicht strikt, da $\delta_{\text{if}}(true, 0, \varnothing_{nat}) \neq \varnothing_{nat}$.

Aufgabe 4.3 (Striktheitslemma)

Zeigen Sie, dass jede strikte Funktion monoton ist (vgl. Lemma 2.3.4, Striktheitslemma; Übung 2.3.5.(ii)).

Lösungsvorschlag:

Sei $(E_i, \sqsubseteq_{E_i})_{1 \leq i \leq n+1}$ eine Familie flacher Halbordnungen, sei $\phi : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_{n+1}$ eine strikte Funktion. Wir zeigen die Monotonie von ϕ:

Seien $(e_1, \ldots, e_n), (d_1, \ldots, d_n) \in (E_i, \sqsubseteq_{E_i})_{1 \leq i \leq n}$ beliebig mit $(e_1, \ldots, e_n) \sqsubseteq_{E_1 \times \ldots \times E_n} (d_1, \ldots, d_n) \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}.e_i \sqsubseteq_{E_i} d_i$

Fall $\forall i \in \{1, \ldots, n\}.e_i \neq \bot_{E_i}$**:**

$$\begin{array}{lll} \sqsubseteq_{E_i} \text{ flach} & \Rightarrow & \forall i \in \{1, \ldots, n\}.e_i = d_i \\ & \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_n) = \phi(d_1, \ldots, d_n) \\ \sqsubseteq_{E_{n+1}} \text{ reflexiv} & \Rightarrow & \phi(e_1, \ldots, e_n) \sqsubseteq_{E_{n+1}} \phi(d_1, \ldots, d_n) \end{array}$$

Fall $\exists i \in \{1, \ldots, n\}.e_i = \bot_{E_i}$**:** $\underbrace{\Rightarrow}_{\phi \text{ strikt}} \phi(e_1, \ldots, e_n) = \bot_{E_{n+1}} \underbrace{\sqsubseteq_{E_{n+1}}}_{\bot_{E_{n+1}} \text{ kleinstes Element}} \phi(d_1, \ldots, d_n)$

Aufgabe 4.4 (Halbordnung auf Funktionen)

Sei D eine Menge, und sei $(E, \sqsubseteq_E)$ eine Halbordnung mit $\bot_E$ als kleinstem Element. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (vgl. Übung 2.3.6):

(a) $\omega_{D \to E} \sqsubseteq_{D \to E} \phi$ für alle Funktionen $\phi \in \{D \to E\}$,

Lösungsvorschlag:

Sei $d \in D$ beliebig $\Rightarrow \phi(d) \in E \Rightarrow \bot_E \sqsubseteq \phi(d)$ (da $\bot_E$ kleinstes Element) $\Rightarrow \omega(d) \sqsubseteq \phi(d)$ (da $\omega(d) = \bot_E$) $\Rightarrow \omega \sqsubseteq \phi$ (da d beliebig)

(b) $\phi = \psi$ gdw. $\phi \sqsubseteq_{D \to E} \psi \sqsubseteq_{D \to E} \phi$ für alle Funktionen $\phi, \psi \in \{D \to E\}$,

Lösungsvorschlag:

Sei $d \in D$ beliebig.

$$\begin{array}{lll} & \phi = \psi & \\ \Leftrightarrow & \phi(d) = \psi(d) & \text{denn } (E, \sqsubseteq_E) \text{ ist reflexiv} \\ \Leftrightarrow & \phi(d) \sqsubseteq_E \psi(d) \sqsubseteq_E \phi(d) & \text{denn } d \text{ ist beliebig} \\ \Leftrightarrow & \phi \sqsubseteq_{D \to E} \psi \sqsubseteq_{D \to E} \phi & \end{array}$$

(c) $(\{D \to E\}, \sqsubseteq_{D \to E})$ ist eine Halbordnung mit $\omega_{D \to E}$ als kleinstem Element.

Lösungsvorschlag:

Ziel $\sqsubseteq_{D \to E}$ **ist reflexiv:** folgt aus (b)

Ziel $\sqsubseteq_{D\to E}$ ist antisymmetrisch: folgt aus (b)

Ziel $\sqsubseteq_{D\to E}$ ist transitiv: Seien $\phi \sqsubseteq_{D\to E} \psi \sqsubseteq_{D\to E} \chi$ und $d \in D$ beliebig $\Rightarrow \phi(d) \sqsubseteq_E \psi(d) \sqsubseteq_E \chi(d)$ $\Rightarrow \phi(d) \sqsubseteq_E \chi(d)$ (denn $(E \sqsubseteq_E)$ ist eine Halbordnung und damit transitiv) $\Rightarrow \phi \sqsubseteq_{D\to E} \chi$ (da d beliebig).

Aufgabe 4.5 (Ketten und Funktionsfolgen)

Gegeben sei die Halbordnung $(\mathbb{N} \cup \{\bot\}, \sqsubseteq)$ mit $n \sqsubseteq m$ gdw. $n = m$ oder $n = \bot$. Ferner sei $\langle \phi_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $\phi_i \in \{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}$ und

$$\phi_i(n) \ := \begin{cases} n^3, & \text{falls } 10 \le n \le i, \\ \bot, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\langle \phi_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ eine Kette in $\{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}$ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\sup_i \langle \phi_i \rangle$.

Lösungsvorschlag:

Kette? $\langle \phi_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Kette in $\{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}$.

Beweis: zu zeigen $\forall i, n \in \mathbb{N}. \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$.

Fall $0 \le n < 10$: $\Rightarrow \phi_i(n) = \bot = \phi_{i+1}(n) \Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$

Fall $10 \le n$:

Fall $n \le i$: $\Rightarrow \phi_i(n) = n^3 = \phi_{i+1}(n) \Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$

Fall $n = i + 1$: $\Rightarrow \phi_i(n) = \bot, \phi_{i+1} = n^3 \Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$

Fall $i + 1 < n$: $\Rightarrow \phi_i(n) = \bot = \phi_{i+1}(n) \Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$

Insgesamt $\Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi_{i+1}(n)$

Bestimmung des Supremums: Da $(\{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}, \sqsubseteq)$ vollständige Halbordnung ist (Lemma 2.3.8), folgt $\sup_i \langle d_i \rangle$ existiert.

Behauptung: $\sup_i \langle \phi_i \rangle = \phi$ mit $\phi : n \mapsto \begin{cases} \bot, & \text{falls } 0 \le n < 10 \\ n^3, & \text{sonst} \end{cases}$

Zeige $\forall i \in \mathbb{N}. \phi_i \sqsubseteq \phi$: also $\forall n, i \in \mathbb{N}. \phi_i(n) \sqsubseteq \phi(n)$.

Fall $0 \le n < 10$: $\Rightarrow \phi_i(n) = \bot \sqsubseteq \bot = \phi(n)$

Fall $10 \le n$:

Fall $n \le i$: $\Rightarrow \phi_i(n) = n^3 \sqsubseteq n^3 = \phi(n)$

Fall $n > i$: $\Rightarrow \phi_i(n) = \bot \sqsubseteq n^3 = \phi(n)$

Insgesamt $\Rightarrow \phi_i(n) \sqsubseteq \phi(n)$

Zeige ϕ ist kleinste obere Schranke: Sei $\bar{\phi}$ eine beliebige obere Schranke von $\langle \phi_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$. $\Rightarrow \forall i, n \in \mathbb{N}. \phi_i(n) \sqsubseteq \bar{\phi}(n)$. Insbesondere gilt also $\forall n \in \mathbb{N}.\, \phi_n(n) \sqsubseteq \bar{\phi}(n)$. Es gilt aber $\phi_n(n) = \begin{cases} \bot, & \text{falls } 0 \le n < 10 \\ n^3, & \text{sonst} \end{cases}$, also $\forall n \in \mathbb{N}.\, \phi_n(n) = \phi(n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}.\, \phi(n) \sqsubseteq \bar{\phi}(n) \Rightarrow \phi \sqsubseteq \bar{\phi}$. Also ist ϕ die *kleinste* ober Schranke $\Rightarrow \sup_i \langle \phi_i \rangle = \phi$.