Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (Fixpunkte)

Gegeben sei die Funktionsprozedur $F_{modifac} =$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{function } modifac(x : nat) : nat & \Leftarrow & \textbf{if } x = 0 \\
& & \quad \textbf{then } modifac(0) \\
& & \quad \textbf{else } x \otimes modifac(pred(x)) \\
& & \textbf{fi}.
\end{array}
$$

(a) Stellen Sie zu dieser Funktionsprozedur eine Fixpunktgleichung der Form $\phi = \mathcal{R}_F[\![\phi]\!]$ für $\phi \in \{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}$ auf. Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung, wenn Sie das Zeichen $\otimes$ in obiger Funktionsprozedur als die übliche Multiplikation interpretieren. Sie brauchen keinen Nachweis zu führen, dass Ihre Aufzählung *alle* Lösungen beinhaltet.

(b) Wie lautet der kleinste Fixpunkt von $\mathcal{R}_F$ bezüglich der Relation $\sqsubseteq_{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}}$?

Aufgabe 5.2 (Fixpunkt einer Iterationsfolge)

Sei $P = \langle F \rangle$ ein funktionales Programm mit $F =$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{function } f(x : nat) : nat & \Leftarrow & \textbf{if } x = 0 \\
& & \quad \textbf{then } 0 \\
& & \quad \textbf{else if } x = 1 \\
& & \qquad\qquad \textbf{then } f(x+2) - 1 \\
& & \qquad\qquad \textbf{else } 1 + f(x-2) \\
& & \qquad\quad \textbf{fi} \\
& & \textbf{fi},
\end{array}
$$

wobei $x + 2$ abkürzend für $succ(succ(x))$ und $x - 2$ für $pred(pred(x))$ steht. Bestimmen Sie für das Funktional $\mathcal{R}_P$ des Programms P die Iterationsfolge $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ sowie den kleinsten Fixpunkt $\phi = fix_{\mathcal{R}_P}$ von $\mathcal{R}_P$ (vgl. 2.3.11.(i)).

Aufgabe 5.3 (Ordnung zwischen semantischen Funktionen)

Sei $P = \langle$ **function** $fie(x, y : nat) : nat \ \Leftarrow succ(x),$

function $foo(x, y : nat) : nat \ \Leftarrow$
$if_{nat}(eq(x, y), succ(y), succ(x)) \ \rangle.$

Vergleichen Sie $\delta_{P,fie}$ und $\delta_{P,foo}$ bezüglich $\sqsubseteq_{\mathcal{D}_{nat,nat} \to \mathcal{D}_{nat}}$ (vgl. Übung 2.3.12).

Aufgabe 5.4 (eval_P-Auswertungen)

Zeigen Sie unter Verwendung von Übung 2.3.2.(iv), dass für alle $f \in \Sigma(P)_{w,s}$ mit $w = s_1 \dots s_n$, alle $t_1 \dots t_n \in \mathcal{T}(\Sigma(P))_w$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Aus $\mathsf{eval}_P(t_i) = \propto$ folgt $\mathsf{eval}_P(f(t_1, \dots, t_n)) = \propto$ oder $\mathsf{eval}_P(f(t_1, \dots, t_n)) = \mathsf{eval}_P(f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n))$ für alle $t \in \mathcal{T}(\Sigma(P))_{s_i}$ (vgl. Übung 2.4.1).