Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1 (Flache Halbordnungen)

Sei $(E_i, \sqsubseteq_{E_i})_{1 \leq i \leq n+1}$ eine Familie flacher Halbordnungen mit $\perp_{E_i}$ als jeweils kleinstem Element, sowie $\phi \in \{E_1 \times \ldots \times E_n \to E_{n+1}\}$ mit $n \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $n = 0$, dann ist ϕ monoton.

(b) Wenn $n = 1$, dann ist ϕ monoton gdw. $\phi(\perp_{E_1}) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1) = e$ für ein $e \in E_{n+1}$ und alle $e_1 \in E_1$ gilt.

(c) Falls $n > 1$ und ϕ monoton ist, gilt entweder $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1, \ldots, e_n) = e$ für ein $e \in E_{n+1}$ und alle $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$.

(d) Die Umkehrung zu (c) gilt nicht. Also kann ϕ für $n > 1$ so gewählt werden, dass $\phi(\perp_{E_1}, \ldots, \perp_{E_n}) = \perp_{E_{n+1}}$ gilt und ϕ nicht monoton ist.

(e) ϕ ist monoton gdw. für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und für alle $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ entweder $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \perp_{E_{n+1}}$ oder $\phi(e_1, \ldots, e_{i-1}, \perp_{E_i}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \phi(e_1, \ldots, e_n)$ gilt.

Aufgabe 4.2 (strikte Funktionen)

Bestimmen Sie alle strikten Funktionen der $\Sigma(\mathrm{BM})$-Algebra D_{BM} (vgl. Übung 2.3.5.(i)).

Aufgabe 4.3 (Striktheitslemma)

Zeigen Sie, dass jede strikte Funktion monoton ist (vgl. Lemma 2.3.4, Striktheitslemma; Übung 2.3.5.(ii)).

Aufgabe 4.4 (Halbordnung auf Funktionen)

Sei D eine Menge, und sei $(E, \sqsubseteq_E)$ eine Halbordnung mit $\perp_E$ als kleinstem Element. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (vgl. Übung 2.3.6):

(a) $\omega_{D \to E} \sqsubseteq_{D \to E} \phi$ für alle Funktionen $\phi \in \{D \to E\}$,

(b) $\phi = \psi$ gdw. $\phi \sqsubseteq_{D \to E} \psi \sqsubseteq_{D \to E} \phi$ für alle Funktionen $\phi, \psi \in \{D \to E\}$,

(c) $(\{D \to E\}, \sqsubseteq_{D \to E})$ ist eine Halbordnung mit $\omega_{D \to E}$ als kleinstem Element.

Aufgabe 4.5 (Ketten und Funktionsfolgen)

Gegeben sei die Halbordnung $(\mathbb{N} \cup \{\perp\}, \sqsubseteq)$ mit $n \sqsubseteq m$ gdw. $n = m$ oder $n = \perp$. Ferner sei $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $\phi_i \in \{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}\}$ und

$$\phi_i(n) \;:=\; \begin{cases} n^3, & \text{falls } 10 \leq n \leq i, \\ \perp, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Kette in $\{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}\}$ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\sup_i \langle \phi_i \rangle$.