Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 (Terme)

Sei $\mathcal{S} = \{s1, s2\}$ und sei Σ eine $\mathcal{S}$-sortierte Signatur mit

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^{\mathrm{c}}_{\lambda,s1} & = & \{a\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{\lambda,s2} & = & \{b\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{s1,s1} & = & \{f\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{s1\,s2,s2} & = & \{g\}, \\ \Sigma^{\mathrm{d}}_{s1\,s2,s1} & = & \{h\}. \end{array}$$

Weiter seien $\{x, z\} \subset \mathcal{V}_{s1}$ und $y \in \mathcal{V}_{s2}$.

(a) Bilden Sie alle Terme aus $\mathcal{T}(\Sigma, \{x, y, z\})$, die höchstens zwei Funktionssymbole enthalten.

(b) Welche dieser Terme sind Konstruktorgrundterme?

(c) Wenden Sie die Substitution $\{x/f(x), y/b\}$ auf die Terme aus (a) an. Welche der nun entstandenen Terme sind Konstruktorgrundterme?

(d) Sei t der Term $h(f(x), g(f(x), y))$. Geben Sie die Menge Occ(t) seiner Stellen an. Für welche Stellen π_1, π_2 gilt $t|_{\pi_1} \leq_{\mathcal{T}} t|_{\pi_2}$?
Bilden Sie die Terme $t_1 = t[1\,1 \leftarrow a]$ und $t_2 = t[1 \leftarrow f(x)]\,[2\,1 \leftarrow f(a)]\,[1\,1 \leftarrow a]$. Gibt es Substitutionen σ_1, σ_2, so daß $t_1 = \sigma_1(t)$ oder $t_2 = \sigma_2(t)$ gilt?

Aufgabe 1.2 (Substitutionen)

Seien $\mathcal{S}$, Σ und $\mathcal{V}$ wie in Aufgabe 1.1 gegeben.
Welche der nachfolgenden Abbildungen sind Substitutionen? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(a) $\sigma_1 := \{x/f(x), y/b\}$

(b) $\sigma_2 := \{x/g(a, b), y/g(a, b), z/f(x)\}$

(c) $\sigma_3 := \{f^i(x)/f^{i+1}(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $f^0(x) = x$ und $f^{i+1}(x) = f(f^i(x))$

(d) $\sigma_4 := \{x/f(h(x, b)), y/b, z/h(f(x), g(a, y))\}$

(e) $\sigma_5 := \{x/f(h(x, a)), y/a, z/h(f(x), g(b, y))\}$

Aufgabe 1.3 (Modell)

Sei $\mathcal{S} = \{s1, s2\}$ und sei Σ eine $\mathcal{S}$–sortierte Signatur mit

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^{\mathrm{c}}_{\lambda,s1} & = & \{a\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{\lambda,s2} & = & \{b\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{s1,s1} & = & \{f\}, \\ \Sigma^{\mathrm{c}}_{s1\,s1,s1} & = & \{g\}, \\ \Sigma^{\mathrm{d}}_{s1\,s2,s1} & = & \{h\}. \end{array}$$

Weiter seien $\{x, y\} \subset \mathcal{V}_{s1}$ und $z \in \mathcal{V}_{s2}$.

Betrachten Sie nun die folgende Formelmenge:

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{\forall x : s1\ \forall y : s1\ \ h(g(x,y), b) \equiv g(y,x), \\ & & \forall z : s2\ \ g(a, h(a,z)) \equiv f(f(a))\}. \end{array}$$

Geben Sie eine Σ–Algebra an, die Modell von Φ ist.

Aufgabe 1.4 (Fundierte Mengen)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen. Verwenden Sie für (a) und (b) Satz 1.3.2 aus der Vorlesung. Hierbei seien $>_{\mathbb{N}}$ und $>_{\mathbb{Q}^+}$ die üblichen grösser-als-Relationen auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}^+$.

(a) Sei $n <_{\mathbb{N}} m$ gdw. $m >_{\mathbb{N}} n$. Dann ist $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ keine fundierte Menge.

(b) $(\mathbb{Q}^+, >_{\mathbb{Q}^+})$ ist keine fundierte Menge.

(c) Für alle $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ mit $\epsilon >_{\mathbb{Q}^+} 0$ ist $(\mathbb{Q}^+, >_\epsilon)$ mit $q >_\epsilon r$ gdw. $(q - r) >_{\mathbb{Q}^+} \epsilon$ eine fundierte Menge.

Anhang: Umformungsregeln für Formeln:

$$
\begin{aligned}
A \wedge A &\Leftrightarrow A && (1)\\
A \vee A &\Leftrightarrow A && (2)\\
A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A && (3)\\
A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A && (4)\\
A \wedge (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C && (5)\\
A \vee (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \vee C && (6)\\
A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) && (7)\\
A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) && (8)\\
A \wedge (B \vee \neg B) &\Leftrightarrow A && (9)\\
A \vee (B \wedge \neg B) &\Leftrightarrow A && (10)\\
A \wedge (A \vee B) &\Leftrightarrow A && (11)\\
A \vee (A \wedge B) &\Leftrightarrow A && (12)\\
\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B && (13)\\
\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B && (14)\\
\neg\neg A &\Leftrightarrow A && (15)\\
\neg\forall x : s\ A &\Leftrightarrow \exists x : s\ \neg A && (16)\\
\neg\exists x : s\ A &\Leftrightarrow \forall x : s\ \neg A && (17)\\
(\forall x : s\ A) \wedge B &\Leftrightarrow \forall x : s\ (A \wedge B),\ x\ nicht\ frei\ in\ B && (18)\\
(\forall x : s\ A) \vee B &\Leftrightarrow \forall x : s\ (A \vee B),\ x\ nicht\ frei\ in\ B && (19)\\
(\exists x : s\ A) \wedge B &\Leftrightarrow \exists x : s\ (A \wedge B),\ x\ nicht\ frei\ in\ B && (20)\\
(\exists x : s\ A) \vee B &\Leftrightarrow \exists x : s\ (A \vee B),\ x\ nicht\ frei\ in\ B && (21)
\end{aligned}
$$