Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Hausaufgabe 4

Abgabe dieser Übung bis Mittwoch, 14. Januar, 16.30 Uhr im Sekretariat S202/A310.

Hausaufgabe 4.1 (Stetigkeit eines Funktionals) (1 + 2 = 3 Punkte)

Sei $(E, \sqsubseteq_E)$ eine vollständige Halbordnung, in der jede $\sqsubseteq_E$–Kette endlich ist, und sei $\phi \in [E \to E]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \phi_i \circ \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine $\sqsubseteq_{E\to E}$-Kette in $[E \to E]$ ist, falls $\langle \phi_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\sqsubseteq_{E\to E}$-Kette in $[E \to E]$ ist. Hierbei bezeichnet $\circ$ die Funktionskomposition, also $(\phi \circ \phi)(x) = \phi(\phi(x))$.

(b) Zeigen Sie, dass das Funktional $\mathcal{SQ} : [E \to E] \to [E \to E]$ mit $\mathcal{SQ}[\![\phi]\!] = \phi \circ \phi$ für alle $\phi \in [E \to E]$ bezüglich der Relation $\sqsubseteq_{E\to E}$ stetig ist.

Hinweis: zeigen Sie $\mathcal{SQ}[\![\sup_i \langle \phi_i \rangle]\!] = \sup_i \langle \mathcal{SQ}[\![\phi_i]\!] \rangle$ durch den Beweis von

$$
\begin{array}{lccc}
1. & \sup_i \langle \mathcal{SQ}[\![\phi_i]\!] \rangle & \sqsubseteq_{E\to E} & \mathcal{SQ}[\![\sup_i \langle \phi_i \rangle]\!] \\
2. & \mathcal{SQ}[\![\sup_i \langle \phi_i \rangle]\!] & \sqsubseteq_{E\to E} & \sup_i \langle \mathcal{SQ}[\![\phi_i]\!] \rangle
\end{array}
$$

Verwenden Sie für die zweite Beziehung Lemma 2.3.9. (vgl. Übung 2.3.8)

Hausaufgabe 4.2 (Kleinster Fixpunkt einer Iterationsfolge) (5 Punkte)

Sei $P = \langle F_1, F_2 \rangle$ ein funktionales Programm mit $F_1 =$

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{function } f_1(x : nat) : nat \ \Leftarrow & \textbf{if } x = 0 \\
& \quad \textbf{then } 0 \\
& \quad \textbf{else if } x = 1 \\
& \qquad\quad \textbf{then } 0 \\
& \qquad\quad \textbf{else } 1 + f_1(x - 2) \\
& \qquad \textbf{fi} \\
& \textbf{fi}
\end{array}
$$

und $F_2 =$

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{function } f_2(x : nat) : nat \ \Leftarrow & \textbf{if } x = 0 \\
& \quad \textbf{then } f_2(0) \\
& \quad \textbf{else if } x = 1 \\
& \qquad\quad \textbf{then } 0 \\
& \qquad\quad \textbf{else } 1 + f_2(f_1(x)) \\
& \qquad \textbf{fi} \\
& \textbf{fi},
\end{array}
$$

wobei $1 + x$ abkürzend für $succ(x)$ und $x - 2$ für $pred(pred(x))$ steht. Bestimmen Sie für das Funktional $\mathcal{R}_P$ des Programmes P die Iterationsfolge $\langle (\phi_{1,i}, \phi_{2,i}) \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ sowie den kleinsten Fixpunkt $(\phi_1, \phi_2) = fix_{\mathcal{R}_P}$ von $\mathcal{R}_P$ (vgl. Übung 2.3.11.(ii)).

Hausaufgabe 4.3 (Aussagen in D_P) **(4 Punkte)**

Sei $P = \langle$ **function** $double(x : nat) : nat \;\Leftarrow$
$if_{nat}(eq_{nat}(x, 0), 0, succ(succ(double(pred(x))))),$

function $half(x : nat) : nat \;\Leftarrow$
$if_{nat}(eq_{nat}(x, 0),$
$0,$
$if_{nat}(eq_{nat}(x, succ(0)), 0, succ(half(pred(pred(x)))))) \rangle.$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $D_P \models [\forall n : nat.n \equiv half(double(n))]$,

(b) $D_P \not\models [\forall n : nat.eq_{nat}(n, half(double(n))) \equiv true]$,

(c) $D_P \not\models [\exists n : nat.eq_{nat}(n, half(double(n))) \equiv false]$.

Hinweis: Sie können die zum Beweis notwendigen Deutungen der Funktionssymbole $half$ und $double$ ohne Fixpunktiteration oder Lösung der Fixpunktgleichung direkt angeben (vgl. Übung 2.3.14).

Hausaufgabe 4.4 (Länge von eval_P und $\mathsf{cbv\text{-}eval}_P$ Auswertung) **(2 Punkte)**

Sei P ein beliebiges funktionales Programm. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $t \in \mathcal{T}(\Sigma(P))$ gilt: $|t|_P \geq \|t\|_P$.

(b) Für alle $t \in \mathcal{T}(\Sigma(P))$ gilt: $\|t\|_P \geq |t|_P$.