Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Hausaufgabe 3

Abgabe dieser Übung bis Mittwoch, 10. Dezember, 16.30 Uhr im Sekretariat S202/A310.

Hausaufgabe 3.1 (Unterschied zwischen $\equiv$ und eq_{nat}) (8 × 0.5 = 4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $D_{\text{BM}} \models [\forall n : nat\ n \equiv n]$

(b) $D_{\text{BM}} \not\models [\forall n : nat\ eq_{\text{nat}}(n, n) \equiv true]$

(c) $D_{\text{BM}} \models [\forall n : nat\ n \equiv 0 \vee n \equiv succ(pred(n))]$

(d) $D_{\text{BM}} \not\models [\forall n : nat\ eq_{\text{nat}}(n, 0) \equiv true \vee eq_{\text{nat}}(n, succ(pred(n))) \equiv true]$

(e) $D_{\text{BM}} \models [\forall n, m : nat\ eq_{\text{nat}}(n, m) \equiv true \to n \equiv m]$

(f) $D_{\text{BM}} \models [\forall n, m : nat\ eq_{\text{nat}}(n, m) \equiv false \to \neg n \equiv m]$

(g) $D_{\text{BM}} \models [\forall n, m : nat\ eq_{\text{nat}}(n, m) \equiv true \to \neg eq_{\text{nat}}(n, m) \equiv false]$

(h) Diskutieren Sie nun unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilaufgaben den Unterschied zwischen eq_{nat} und $\equiv$.

Hausaufgabe 3.2 (Monotonie, ω-Totalität) (1 + 4 + 1 = 6 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $\phi_{\text{eq}} : \mathcal{D}_{\text{nat}} \times \mathcal{D}_{\text{nat}} \to \mathcal{D}_{\text{bool}}$ mit $\phi_{\text{eq}}(d, e) = true$, falls $d = e$ und $\phi_{\text{eq}}(d, e) = false$, falls $d \neq e$. Beweisen oder widerlegen Sie, daß ϕ_{eq} monoton ist.

(b) Zeigen Sie, daß die $\Sigma(\text{BM})$–Algebra D_{BM} monoton ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussagen aus der Präsenzübung, Aufgabe 4.1.

(c) Bestimmen Sie alle ω–totalen Funktionen von D_{BM}.

Hausaufgabe 3.3 (Supremum einer Iterationenfolge) (2 Punkte)

Gegeben sei die Halbordnung $(\mathbb{N} \cup \{\bot\}, \sqsubseteq)$ mit $n \sqsubseteq m$ gdw. $n = m$ oder $n = \bot$. Ferner sei $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $\phi_i \in \{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}\}$ und

$$\phi_i(n) := \begin{cases} n!, & \text{falls } n < i, \\ \bot, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\sup_i \langle \phi_i \rangle = n!$ gilt.

Hausaufgabe 3.4 (Ketten und Suprema) (1 Punkt)

Seien $(E_1, \sqsubseteq_{E_1})$ eine Halbordnung, $(E_2, \sqsubseteq_{E_2})$ eine vollständige Halbordnung und $\phi \in [E_1 \to E_2]$. Zeigen Sie, dass für jede $\sqsubseteq_{E_1}$-Kette $\langle e_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ in E_1 $\sup_i \langle \phi(e_i) \rangle$ existiert (vgl. Übung 2.3.7).