Semantik und Programmverifikation

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2008/09

Hausaufgabe 1

Abgabe dieser Übung bis Mittwoch, 05. November, 16.30 Uhr im Sekretariat S202/A310.

Hausaufgabe 1.1 (Folgerungsrelation) **(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)**

Seien φ und ψ beliebige Formeln über Σ und $\mathcal{V}$. φ besitze die freie Variable $x \in \mathcal{V}_s$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\{\forall x : s\ \varphi\} \models \varphi$,

(b) $\{\varphi\} \models \forall x : s\ \varphi$,

(c) $\{\varphi\} \models \psi$ gdw. $\emptyset \models \varphi \to \psi$ (*Deduktionstheorem*)

Hausaufgabe 1.2 (Theorien) **(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)**

Zeigen Sie, daß für jede Σ-Algebra A gilt:

(a) $\mathrm{Th}(A) \neq \emptyset$,

(b) $\forall \varphi \in \mathrm{Th}(A).\ \neg\varphi \notin \mathrm{Th}(A)$, d.h. $\mathrm{Th}(A)$ ist *konsistent*,

(c) $\forall \varphi \in \mathcal{F}_g(\Sigma, \mathcal{V}).\ \varphi \in \mathrm{Th}(A)\ \vee\ \neg\varphi \in \mathrm{Th}(A)$, d.h. $\mathrm{Th}(A)$ ist *vollständig*.

Hausaufgabe 1.3 (Termerzeugte Algebren, Substitutionslemma) **(3 + 1 = 4 Punkte)**

Eine Algebra $A = (\mathcal{A}, \alpha)$ heisst *termerzeugt*, falls es für jedes $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ einen Grundterm $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ gibt, so dass $A(t) = \mathbf{a}$ gilt.

(a) Beweisen Sie, daß für beliebige Σ–Interpretationen (A, a), (B, b) die folgende Aussage gilt, falls A und B termerzeugt sind:

$$
\begin{aligned}
&[\forall \psi \in \mathcal{A}t(\Sigma, \mathcal{V}).\ ((A, a) \models \psi \Leftrightarrow (B, b) \models \psi)] \\
\Longleftrightarrow\ &[\forall \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V}).\ ((A, a) \models \varphi \Leftrightarrow (B, b) \models \varphi)]
\end{aligned}
$$

Hinweis: Verwenden Sie das Substitutionslemma 1.2.1.(ii) für Formeln.

(b) Gilt die Aussage von Teil (a) auch, falls A oder B nicht termerzeugt sind?

Hausaufgabe 1.4 (fundierte Mengen) **(1 + 3 + 1 = 5 Punkte)**

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen. Verwenden Sie dabei Satz 1.4.1 aus der Vorlesung. Sie können dazu $(\mathbb{N}, >_\mathbb{N})$ als fundiert voraussetzen.

(a) Seien $(M, >_M)$ und $(N, >_N)$ fundierte Mengen, seien $f : K \to M$ und $g : K \to N$ Abbildungen und sei $>_K \subset K \times K$ definiert durch:

$$k_1 >_K k_2 \;\text{ gdw. }\; f(k_1) >_M f(k_2) \;\text{ oder }\; (f(k_1) = f(k_2) \;\text{ und }\; g(k_1) >_N g(k_2)).$$

Dann ist $(K, >_K)$ eine fundierte Menge (vgl. Lemma 1.4.3.(i))

(b) $(\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}), >_\mathcal{T})$ ist eine fundierte Menge (vgl. Beispiel 1.3.1.(ii)).

Hinweis: Verwenden Sie **nicht** die Fundiertheit von $>_{|\cdot|}$.

(c) $(\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}), >_{|\,|})$ ist eine fundierte Menge, wobei $t >_{|\,|} q$ gdw. $|t| >_\mathbb{N} |q|$. Hierbei gibt $|t|$ die Anzahl der Symbole in t an (vgl. Beispiel 1.3.1.(iii)).

Hinweis: Geben Sie zunächst eine Definition für $|\cdot|$ an.