# Errata zu
# "Christoph Walther: Semantik und Programmverifikation. Teubner-Wiley, Leipzig, 2001."
# 26. November 2005

**Definition 2.3.10** (Vollständige Halbordnungen und Unterhalbordnungen, Seite 75 ergänzt)
*Eine Halbordnung* $(E, \sqsubseteq_E)$ *heißt* vollständig *gdw.*

*(i)* $E$ *enthält ein kleinstes Element* $\bot_E$*, und*

*(ii) für jede* $\sqsubseteq_E$*-Kette* $K \subset E$ *existiert eine kleinste obere Schranke* $sup(K) \in E$.

*Wenn* $(E, \sqsubseteq_E)$ *eine vollständige Halbordnung ist,* $E' \subset E$ *und* $\sqsubseteq_{E'} = \sqsubseteq_E \cap (E' \times E')$*, so ist* $(E', \sqsubseteq_{E'})$ *eine* vollständige Unterhalbordnung *von* $(E, \sqsubseteq_E)$ *gdw.*

*(iii)* $(E', \sqsubseteq_{E'})$ *ist eine vollständige Halbordnung, und*

*(iv) für jede* $\sqsubseteq_{E'}$*-Kette* $K' \subset E'$ *gilt* $sup_{\sqsubseteq_{E'}}(K') = sup_{\sqsubseteq_E}(K')$.

**Übung 2.3.15** (Vollständige Halbordnungen und Unterhalbordnungen, neu)

*(i) Zeigen Sie, daß* $(2^{\mathbb{N}}, \subset)$ *eine vollständige Halbordnung ist.*

*(ii) Sei* $\mathcal{N} = \left\{N \in 2^{\mathbb{N}} \mid |N| < \infty\right\}$*. Zeigen Sie, daß* $(\mathcal{N} \cup \{\mathbb{N}\}, \subset)$ *eine vollständige Halbordnung ist.*

*(iii) Zeigen Sie, daß* $(\mathcal{N} \cup \{\mathbb{N}\}, \subset)$ keine *vollständige Unterhalbordnung von* $(2^{\mathbb{N}}, \subset)$ *ist.*

**Lemma 2.3.8** (sup-lemma, Seite 77)
*Sei* $(E, \sqsubseteq_E)$ *eine vollständige Halbordnung und* $D$ *eine Menge. Dann ist* $(\{D \to E\}, \sqsubseteq_{\{D \to E\}})$ *eine vollständige Halbordnung mit kleinstem Element* $\omega_{D \to E}$.

*Beweis* Wie im Buch, nur mit $F = \{D \to E\}$.

**Lemma 2.3.8(a)** (Vollständige Unterhalbordnungen durch monotone Funktionen, neu)
*Sei* $(E, \sqsubseteq_E)$ *eine vollständige Halbordnung und* $(D, \sqsubseteq_D)$ *eine Halbordnung. Dann ist* $([D \to E], \sqsubseteq_{[D \to E]})$ *eine vollständige Unterhalbordnung von* $(\{D \to E\}, \sqsubseteq_{\{D \to E\}})$.

*Beweis* (i) Wir zeigen, daß $([D \to E], \sqsubseteq_{[D \to E]})$ eine vollständige Halbordnung ist: Da $\omega_{D \to E}$ monoton ist, besitzt $([D \to E], \sqsubseteq_{[D \to E]})$ ein kleinstes Element. Sei nun $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine $\sqsubseteq_{[D \to E]}$-Kette in $[D \to E]$, und sei $\phi$ definiert wie im Beweis von Lemma 2.3.8. Dann ist $\phi$ eine kleinste obere Schranke von $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ und wir zeigen, daß $\phi$ monoton ist, d.h. $\phi \in [D \to E]$. Für $d, d' \in D$ mit $d \sqsubseteq_D d'$ gilt $\phi_i(d) \sqsubseteq_E \phi_i(d')$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, denn $\phi_i \in [D \to E]$. Damit ist $\phi(d')$ eine obere Schranke der $\sqsubseteq_E$-Kette $\langle \phi_i(d) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$, denn $\phi(d')$ ist kleinste obere Schranke der $\sqsubseteq_E$-Kette $\langle \phi_i(d') \rangle_{i \in \mathbb{N}}$. Also gilt $\phi(d) \sqsubseteq_E \phi(d')$, denn $\phi(d)$ ist *kleinste* obere Schranke der $\sqsubseteq_E$-Kette $\langle \phi_i(d) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$.

(ii) $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ ist auch eine $\sqsubseteq_{\{D \to E\}}$-Kette in $\{D \to E\}$, damit gibt es nach Lemma 2.3.8 eine kleinste obere Schranke $\phi' \in \{D \to E\}$ dieser Kette, und folglich gilt $\phi' \sqsubseteq_{\{D \to E\}} \phi$. Nach (i) ist $\phi'$ monoton und $\phi$ ist *kleinste* obere Schranke von $\langle \phi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$, also gilt auch $\phi \sqsubseteq_{\{D \to E\}} \phi'$, d.h. $\phi' = \phi$.

**Satz 2.3.12** (Monotone und stetige Funktionale aus Termen, Seite 85)
Sei $\Sigma = \Sigma(BM) \cup \{f_1, \ldots, f_k\}, x^* \in \mathcal{V}_v, t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}(x^*))_r$ sowie $f_j \in \Sigma_{w_j, s_j}$ und $\phi_j \in \left[\mathcal{D}_{w_j} \to \mathcal{D}_{s_j}\right]$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$. Sei weiter $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k), D(\Phi) = (\mathcal{D}, \delta(\Phi))$ eine $\Sigma$-Expansion von $D_{BM}$ mit $\delta(\Phi)_{f_j} = \phi_j$ und sei $d(\Phi)$ eine $D(\Phi)$-Variablenbelegung. Dann ist das Funktional $\Im_t : [\mathcal{D}_{w_1} \to \mathcal{D}_{s_1}] \times \ldots \times [\mathcal{D}_{w_k} \to \mathcal{D}_{s_k}] \to \{\mathcal{D}_v \to \mathcal{D}_r\}$ mit $\Im_t[\![\Phi]\!](\mathsf{d}^*) := d(\Phi)\,[x^*/\mathsf{d}^*]\,(t)$ monoton und stetig und $\Im_t[\![\Phi]\!]$ ist monoton, d.h. $\Im_t[\![\Phi]\!] \in [\mathcal{D}_v \to \mathcal{D}_r]$.

*Beweis* $(\mathcal{D}_{s_j}, \sqsubseteq_{s_j})$ ist für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ eine flache Halbordnung und mit Lemma 2.3.5 dann auch vollständig. Mit dem sup-Lemma 2.3.8 ist damit $\left(\left\{\mathcal{D}_{w_j} \to \mathcal{D}_{s_j}\right\}, \sqsubseteq_{\left\{\mathcal{D}_{w_j} \to \mathcal{D}_{s_j}\right\}}\right)$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ eine vollständige Halbordnung, mit Lemma 2.3.8.(a) ist dann $\left(\left[\mathcal{D}_{w_j} \to \mathcal{D}_{s_j}\right], \sqsubseteq_{\left[\mathcal{D}_{w_j} \to \mathcal{D}_{s_j}\right]}\right)$ eine vollständige Halbordnung, und mit Lemma 2.3.7 ist schließlich $\left([\mathcal{D}_{w_1} \to \mathcal{D}_{s_1}] \times \ldots \times [\mathcal{D}_{w_k} \to \mathcal{D}_{s_k}], \sqsubseteq_{[\mathcal{D}_{w_1} \to \mathcal{D}_{s_1}] \times \ldots \times [\mathcal{D}_{w_k} \to \mathcal{D}_{s_k}]}\right)$ auch eine vollständige Halbordnung. Also ist $\Im_t$ eine Abbildung von einer vollständigen Halbordnung in eine vollständige Halbordnung. Wir zeigen die Aussage "$\Im_t$ ist monoton und stetig" und "$\Im_t[\![\Phi]\!]$ ist monoton" durch strukturelle Induktion über $t$: ... (weiter wie im Buch).