Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Übung 6

Aufgabe 6.1 (primitiv-rekursive Funktionen)

Beweisen Sie Lemma 11.5, d. h. zeigen Sie die folgenden Aussagen. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen 11.1, 11.2, 11.3 sowie 11.4.

1. Die Funktionen $\mathrm{C}_n^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{C}_n^k(x_1, \ldots, x_k) = n$ sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv.
2. Die Funktion $\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{pred}(0) = 0$ und $\mathrm{pred}(x+1) = x$ ist primitiv-rekursiv.
3. Die Funktion $\mathrm{if} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{if}(0, y_1, y_2) = y_2$ und $\mathrm{if}(x+1, y_1, y_2) = y_1$ ist primitiv-rekursiv.
4. Für den Beweis über die Paar-Funktion und ihre Projektionsfunktionen wollen wir zunächst weitere Hilfsprozeduren einführen. Der Beweis folgt dann in Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.2 (primitiv-rekursive Funktionen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen 11.1, 11.2, 11.3 und 11.4 sowie die Funktion plus.

1. $$\mathrm{minus}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } y > x \\ x - y & \text{, sonst} \end{cases}$$

2. $$\mathrm{times}(x, y) := x \cdot y$$

3. $$\mathrm{sum}(x) := \sum_{i=0}^{x} i$$

4. $$\mu^{\mathsf{b}} f(n, \vec{x}) := \begin{cases} \min\{m \in \mathbb{N} \mid f(m, \vec{x}) = 0\} & \text{, falls } \min\{m \in \mathbb{N} \mid f(m, \vec{x}) = 0\} < n \\ n & \text{, sonst} \end{cases}$$

   für eine primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$

   μ^{b} ist eine Variante des μ-Operators und wird auch als *beschränkter μ-Operator* bezeichnet. Die Definition einer Funktion durch μ^{b} nennt man -analog zur (unbeschränkten) Minimierung durch den (unbeschränkten) μ-Operator- Definition durch *beschränkte Minimierung*.

5.

$$\mathrm{half}(x) := \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

Hinweis: Verwenden Sie μ^{b} aus der vorhergehenden Teilaufgabe.

Aufgabe 6.3 (Paar-Funktion und Projektionen sind primitiv-rekursiv)

Nun sind alle Hilfsfunktionen eingeführt, um nachzuweisen, dass die Paar-Funktion π^2 und ihre Projektionen π_1^2 und π_2^2 primitiv rekursiv sind.
Zeigen Sie: Die Paar-Funktion π^2 und ihre Projektionsfunktionen π_1^2 und π_2^2 sind primitiv rekursiv.
Hinweis: Es gilt

$$\frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \sum_{i=0}^{n_1+n_2} i \text{ also } \pi^2(n_1, n_2) = n_1 + \sum_{i=0}^{n_1+n_2} i$$