Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Übung 4

Aufgabe 4.1 (Quiz)

Die folgenden Quiz-Aufgaben sollen Ihnen dabei helfen, eventuelle fundamentale Wissenslücken im Bereich "Berechenbarkeitstheorie" aufzudecken. Verwenden Sie daher nicht mehr als 10 Minuten der Präsenzübung, um diese Fragen zu beantworten. Wenn Sie länger brauchen oder nicht alle Fragen beantworten können, bearbeiten Sie zunächst die anderen Aufgaben dieses Übungsblattes und denken Sie später in einer ruhigen Minute über die Quizfragen nach. Nutzen Sie auch die Sprechstunde, um offene Fragen zu klären.

1. Jede totale Funktion ist berechenbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

2. Jede berechenbare Funktion ist total.

   ◯ richtig ◯ falsch

3. Jede Funktion mit endlichem Definitionsbereich ist berechenbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

4. Jede Funktion mit endlichem Bildbereich ist berechenbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

5. Jede Funktion f mit $\mathit{Bild}(f) = \mathbb{N}$ ist berechenbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

6. Jede Funktion f mit $\mathit{Def}(f) = \mathbb{N}$ ist berechenbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

7. Jede abzählbare Menge ist rekursiv aufzählbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

8. Die Vereinigung von zwei semi-entscheidbaren Mengen ist semi-entscheidbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

9. Der Schnitt von zwei semi-entscheidbaren Mengen ist semi-entscheidbar.

   ◯ richtig ◯ falsch

10. Das Komplement einer semi-entscheidbaren Menge ist semi-entscheidbar.

    ◯ richtig ◯ falsch

Aufgabe 4.2 (Graph einer berechenbaren Funktion)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale einstellige arithmetische Funktion. Wir kodieren den Graphen von f durch $M_f := \{\pi^2(x, y) \in \mathbb{N} \,|\, x \in \mathit{Def}(f) \wedge y = f(x)\}$.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   a) f ist berechenbar
   b) M_f ist rekursiv aufzählbar
   c) M_f ist entscheidbar
2. Welche der von Ihnen in 1. bewiesenen Implikationen verlieren ihre Gültigkeit, wenn f nicht total ist? Zeigen Sie mit Hilfe einer geeignet gewählten partiellen Funktion, dass die drei Aussagen für partielle Funktionen nicht äquivalent sind.

Aufgabe 4.3 (Entscheidbarkeit)

Untersuchen Sie die Entscheidbarkeit des Problems $M := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \varphi_n(n) = n\}$.

1. Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass M nicht entscheidbar ist.
2. Zeigen Sie durch Angabe eines Programms, dass M semi-entscheidbar ist.
3. Ist $\overline{M}$ semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.