Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Übung 2

Aufgabe 2.1 (Paar-Funktion)

1. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Paar-Funktion $\pi^2 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus Definition 4.2 für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

   a) $\pi^2(n_1 + 1, n_2) = \pi^2(n_1, n_2 + 1) + 1$

   b) $\pi^2(0, n_2 + 1) = \pi^2(n_2, 0) + 1$

   c) $\pi^2(n_1, n_2) \geq n_1$

   d) $\pi^2(n_1, n_2) \geq n_2$

   Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung von (1.) und (2.) auch „graphisch“ anhand von Abb. 4.1.

2. Beweisen Sie Satz 4.3 aus dem Skript, d. h. zeigen Sie, dass die Paar-Funktion $\pi^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\pi^2(n_1, n_2) := \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) + n_1$ eine surjektive, $\mathcal{P}$-berechenbare Gödelisierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

   Hinweis: Um die Injektivität von π^2 zu zeigen, können Sie folgendermaßen vorgehen: Definieren Sie eine fundierte, asymmetrische, transitive und totale Ordnungsrelation $\prec \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ durch

   $$(n_1, n_2) \prec (n_1', n_2') \iff d(n_1, n_2) < d(n_1', n_2') \vee \big(d(n_1, n_2) = d(n_1', n_2') \wedge n_1 < n_1'\big),$$

   wobei $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ durch $d(n_1, n_2) := n_1 + n_2$ definiert ist. d bestimmt die Nummer der Nebendiagonalen des Paars (n_1, n_2). Verdeutlichen Sie sich die Ordnungsrelation anhand Abb. 4.1 im Skript.

   Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe ein $\prec$-minimales Paar (n_1, n_2) mit folgender Eigenschaft:

   $$(\dagger) \quad \text{es gibt ein Paar } (n_1', n_2') \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } (n_1', n_2') \neq (n_1, n_2) \text{ und } \pi^2(n_1', n_2') = \pi^2(n_1, n_2)$$

   Wir zeigen mit 1, dass es dann ein gemäß $\prec$ kleineres Paar $(n_1'', n_2'') \in \mathbb{N}^2$ gibt, das $(\dagger)$ erfüllt und erhalten damit den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 2.2 (Stelligkeit von Funktionen)

Geben Sie $\mathcal{P}[1]$-Programme zur Berechnung von Addition und Multiplikation an, also Programme `PLUS'` und `TIMES'` mit

$$\forall x, y \in \mathbb{N}.\ [\![\texttt{PLUS'}]\!]\big(\pi^2(x, y)\big) = x + y \text{ und } \forall x, y \in \mathbb{N}.\ [\![\texttt{TIMES'}]\!]\big(\pi^2(x, y)\big) = x \cdot y.$$

Sie können dabei die Hilfsprozeduren $\texttt{PAIR}^2$, $\texttt{PAIR}^2_1$ und $\texttt{PAIR}^2_2$ aus Satz 4.3 und Satz 4.4 ohne Angabe ihrer Definitionen verwenden.

Aufgabe 2.3 (Abzählbarkeit)

Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine Bijektion zwischen M und $\mathbb{N}$ gibt. Eine Menge heißt *abzählbar* oder *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. (Eine nicht abzählbare Menge nennt man auch *überabzählbar*.)

Alternativ kann man also Abzählbarkeit wie folgt charakterisieren: Eine Menge M ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach M gibt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen ist ebenfalls abzählbar.
2. Die Vereinigung von zwei überabzählbaren Mengen ist überabzählbar.
3. Die Menge aller partiellen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit endlichen Definitionsbereichen ist abzählbar unendlich.
4. Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit endlichen Bildbereichen ist überabzählbar.