Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Übung 8

Lösungsvorschlag

Aufgabe 8.1 (Turingmaschine)

1. Geben Sie eine Turingmaschine $TM_{SUCC} = (Z, z_{start}, z_{stop}, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}, \square\}, \square, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}, \delta)$ an, die die Nachfolgefunktion S berechnet, d. h. $\phi_{TM_{SUCC}}(dual(n)) = dual(n + 1)$

Lösungsvorschlag

Die Turingmaschine mit $Z := \{z_{start}, z_{add}, z_{done}, z_{stop}\}$ und δ definiert durch das folgende Turingprogramm berechnet die Nachfolgerfunktion.

z_{start}	O	z_{start}	O	$\hookrightarrow$	z_{add}	O	z_{done}	I	$\hookleftarrow$	z_{done}	O	z_{done}	O	$\hookleftarrow$
z_{start}	I	z_{start}	I	$\hookrightarrow$	z_{add}	I	z_{add}	O	$\hookleftarrow$	z_{done}	I	z_{done}	I	$\hookleftarrow$
z_{start}	$\square$	z_{add}	$\square$	$\hookleftarrow$	z_{add}	$\square$	z_{stop}	I	$\circlearrowleft$	z_{done}	$\square$	z_{stop}	$\square$	$\hookrightarrow$

Im Startzustand überliest die TM die Eingabe, um den Lesekopf nach Einlesen des ersten $\square$ im Zustand z_{add} auf dem Ende der Eingabe zu positionieren. Im Zustand z_{add} wird nun vom Ende der Eingabe jede I durch eine O ersetzt. Wird eine O gelesen, wird eine I geschrieben und in den Zustand z_{done} gewechselt, so dass der Lesekopf im Endzustand am Anfang der Eingabe positioniert wird. Enthält die Eingabe keine O, so wird im Zustand z_{add} das führende $\square$ durch eine I ersetzt und an dieser Position in den Endzustand gegangen.

2. Geben Sie eine Turingmaschine $TM_{\text{half}} = (Z, z_{start}, z_{stop}, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}, \square\}, \square, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}, \delta)$ mit

$$\phi_{TM_{\text{half}}}(dual(n)) = dual\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

an.

Lösungsvorschlag

Für die Turingmaschine TM_{half} mit $Z := \{z_{start}, z_{\square}, z_{done}, z_{stop}\}$ und δ definiert durch das folgende Turingprogramm gilt

$$\phi_{TM_{\text{half}}}(dual(n)) = dual\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

z_{start}	O	z_{start}	O	$\hookrightarrow$	$z_{\square}$	O	z_{done}	$\square$	$\hookleftarrow$	z_{done}	O	z_{done}	O	$\hookleftarrow$
z_{start}	I	z_{start}	I	$\hookrightarrow$	$z_{\square}$	I	z_{done}	$\square$	$\hookleftarrow$	z_{done}	I	z_{done}	I	$\hookleftarrow$
z_{start}	$\square$	$z_{\square}$	$\square$	$\hookleftarrow$	$z_{\square}$	$\square$	z_{stop}	$\square$	$\circlearrowleft$	z_{done}	$\square$	z_{stop}	$\square$	$\hookrightarrow$

Nach Überlesen der Eingabe im Zustand z_{start} wird im Zustand $z_{\square}$ die letzte binäre Ziffer durch ein $\square$ ersetzt. Dies entspricht genau der nach unten gerundeten Division durch 2. Anschließend wird im Zustand z_{done} noch die Position zurück an den Anfang der Eingabe gesetzt und dann in den Zustand z_{stop} gegangen.

3. Geben Sie eine Turingmaschine $TM_\omega = (Z, z_{start}, z_{stop}, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}, \square\}, \square, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}, \delta)$ mit

$$\phi_{TM_\omega}(dual(n)) = \perp$$

an.

Lösungsvorschlag

Für die Turingmaschine TM_ω mit $Z := \{z_{start}, z_{stop}\}$ und δ definiert durch das folgende Turingprogramm gilt

$$\phi_{TM_\omega}(dual(n)) = \perp$$

z_{start}	O	z_{start}	O	$\circlearrowleft$
z_{start}	I	z_{start}	I	$\circlearrowleft$
z_{start}	$\square$	z_{start}	$\square$	$\circlearrowleft$

Im Zustand z_{start} bleibt die Maschine in einer Endlosschleife stehen, es gibt keine Endkonfiguration, also ist die Ausgabe der Maschine undefiniert.

4. Geben Sie eine Turingmaschine $TM_4 = (Z, z_{start}, z_{stop}, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}, \square\}, \square, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}, \delta)$ mit

$$\phi_{TM_4}(dual(n)) = \begin{cases} dual\left(\frac{n}{4}\right) & \text{, falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \perp & \text{, sonst} \end{cases}$$

an.

Lösungsvorschlag

Für die Turingmaschine TM_4 mit $Z := \{z_{start}, z_1, z_2, z_{back}, z_{stop}\}$ und δ definiert durch das folgende Turingprogramm gilt

$$\phi_{TM_4}(dual(n)) = \begin{cases} dual\left(\frac{n}{4}\right) & \text{, falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \perp & \text{, sonst} \end{cases}$$

z_{start}	O	z_{start}	O	$\hookrightarrow$	z_1	O	z_2	$\square$	$\hookleftarrow$	z_2	O	z_{back}	$\square$	$\hookleftarrow$
z_{start}	I	z_{start}	I	$\hookrightarrow$	z_1	I	z_1	I	$\circlearrowleft$	z_2	I	z_2	I	$\circlearrowleft$
z_{start}	$\square$	z_1	$\square$	$\hookleftarrow$	z_1	$\square$	z_1	$\square$	$\circlearrowleft$	z_2	$\square$	z_2	$\square$	$\circlearrowleft$

z_{back}	O	z_{back}	O	$\hookleftarrow$
z_{back}	I	z_{back}	I	$\hookleftarrow$
z_{back}	$\square$	z_{stop}	$\square$	$\hookrightarrow$

In z_{start} wird zunächst die Eingabe überlesen, dann wird in den Zuständen z_1 und z_2 überprüft, ob die Zahl ein- oder zweimal durch zwei teilbar ist, also ob an der letzten und vorletzten

Stelle jeweils eine O steht. Ist dies der Fall, so wird bei der Prüfung bereits die O durch ein $\square$ ersetzt, durch entfernen der beiden letzten O wird also die Division durch 4 realisiert. Scheitert einer der Tests, so läuft die Maschine in eine Endlosschleife, um das Ergebnis undefiniert zu lassen.