Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Übung 7

Lösungsvorschlag

Aufgabe 7.1 (μ-rekursive Funktionen)

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen eine Definition durch allgemeine Einsetzung, strukturelle Rekursion oder Minimierung an.

1.

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n > 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Definition durch strukturelle Rekursion: $\mathrm{sgn}(0) := 0 \quad \mathrm{sgn}(n+1) = 1$

2.

$$\mathrm{equals}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } a = b \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Definition durch Einsetzung: $\mathrm{equals}(a, b) := \mathrm{sgn}(\mathrm{plus}(\mathrm{minus}(a, b), \mathrm{minus}(b, a)))$

3.

$$\mathrm{square}(a) = a^2$$

Lösungsvorschlag

Definition durch Einsetzung: $\mathrm{square}(a) := \mathrm{times}(a, a)$

4.

$$\mathrm{greater}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } a > b \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Definition durch Einsetzung: $\mathrm{greater}(a, b) := \mathrm{minus}(1, \mathrm{minus}(a, b))$

Aufgabe 7.2 (μ-rekursive Funktionen)

Beweisen Sie ohne Angabe von $\mathcal{P}$-Programmen, dass die folgenden Funktionen μ-rekursiv sind.

1.

$$f_1(x) = \sqrt{x}$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \text{equals}(\text{square}(y), x) \\ f_1(x) &= \mu\, g(x) \end{aligned}$$

2.

$$f_2(x) = \log_2 x$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \text{equals}(\exp(2,x), y) \\ f_2(x) &= \mu\, g(x) \end{aligned}$$

3.

$$f_3(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= \text{greater}(\text{times}(S(x), z), y) \\ f_3(x,y) &= \mu\, g(x,y) \end{aligned}$$

4.

$$f_4(x,y) = \text{ggT}(x,y)$$

Lösungsvorschlag

Zuerst benutzen wir f_3 um eine Hilfsprozedur divides(x,y) zu schreiben, die genau dann 0 liefert, wenn x die Zahl y teilt:

$$\text{divides}(x,y) = \text{minus}(y, \text{times}(x, f_3(y,x)))$$

Mit Hilfe dieser können wir nun den ggT bestimmen:

$$\begin{aligned} h(w,x,y,z) &= \text{if}(\text{divides}(\text{minus}(x,w), y), S(x), \text{divides}(\text{minus}(x,w), z)) \\ g(x,y,z) &= \mu\, h(x,y,z) \\ f_4(x,y) &= \text{if}(x, \text{if}(y, \text{minus}(\text{plus}(x,y), g(\text{plus}(x,y), x, y)), x), y) \end{aligned}$$