Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Übung 6

Lösungsvorschlag

Aufgabe 6.1 (primitiv-rekursive Funktionen)

Beweisen Sie Lemma 11.5, d. h. zeigen Sie die folgenden Aussagen. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen 11.1, 11.2, 11.3 sowie 11.4.

1. Die Funktionen $\mathrm{C}_n^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{C}_n^k(x_1, \ldots, x_k) = n$ sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv.

   Lösungsvorschlag

   C_0^k ist durch Einsetzung aus Z und 0 k-stelligen Funktionen definiert: $\mathrm{C}_0^k(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{Z}()$.
   C_{n+1}^k ist durch Einsetzung aus S und C_n^k definiert: $\mathrm{C}_{n+1}^k(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{S}(\mathrm{C}_n^k(x_1, \ldots, x_k))$.

2. Die Funktion $\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{pred}(0) = 0$ und $\mathrm{pred}(x + 1) = x$ ist primitiv-rekursiv.

   Lösungsvorschlag

   pred ist definiert durch primitive Rekursion aus Z und P_2^2:

   $$\begin{aligned} \mathrm{pred}(0) &:= \mathrm{Z}() \\ \mathrm{pred}(x+1) &:= \mathrm{P}_2^2(\mathrm{pred}(x), x) \end{aligned}$$

3. Die Funktion $\mathrm{if} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{if}(0, y_1, y_2) = y_2$ und $\mathrm{if}(x + 1, y_1, y_2) = y_1$ ist primitiv-rekursiv.

   Lösungsvorschlag

   if ist durch primitive Rekursion aus P_2^2 und P_3^4 definiert:

   $$\begin{aligned} \mathrm{if}(0, y_1, y_2) &:= \mathrm{P}_2^2(y_1, y_2) \\ \mathrm{if}(x+1, y_1, y_2) &:= \mathrm{P}_3^4(\mathrm{if}(x, y_1, y_2), x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

4. Für den Beweis über die Paar-Funktion und ihre Projektionsfunktionen wollen wir zunächst weitere Hilfsprozeduren einführen. Der Beweis folgt dann in Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.2 (primitiv-rekursive Funktionen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen 11.1, 11.2, 11.3 und 11.4 sowie die Funktion plus.

1.

$$\mathrm{minus}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } y > x \\ x - y & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
&h(a, b, c) := \mathrm{pred}(\mathrm{P}^3_1(a, b, c)) && \text{(Einsetzung)} \\
&\mathrm{minus}'(0, y) := \mathrm{P}^1_1(y) && \\
&\mathrm{minus}'(x + 1, y) := h(\mathrm{minus}'(x, y), x, y) && \text{(primitive Rekursion)} \\
&\mathrm{minus}(x, y) := \mathrm{minus}'(\mathrm{P}^2_2(x, y), \mathrm{P}^2_1(x, y)) && \text{(Einsetzung)}
\end{aligned}$$

2.

$$\mathrm{times}(x, y) := x \cdot y$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
&h(a, b, c) := \mathrm{plus}(\mathrm{P}^3_1(a, b, c), \mathrm{P}^3_3(a, b, c)) && \text{(Einsetzung)} \\
&\mathrm{times}(0, y) := \mathrm{C}^1_0(y) && \\
&\mathrm{times}(x + 1, y) := h(\mathrm{times}(x, y), x, y) && \text{(primitive Rekursion)}
\end{aligned}$$

3.

$$\mathrm{sum}(x) := \sum_{i=0}^{x} i$$

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}^2_2(x, y) := \mathrm{S}(\mathrm{P}^2_2(x, y)) && \text{(Einsetzung)} \\
&h(x, y) := \mathrm{plus}(\mathrm{P}^2_1(x, y), \mathrm{S}^2_2(x, y)) && \text{(Einsetzung)} \\
&\mathrm{sum}(0) = Z() && \\
&\mathrm{sum}(x + 1) := h(\mathrm{sum}(x), x) && \text{(primitive Rekursion)}
\end{aligned}$$

4.

$$\mu^{\mathsf{b}} f(n, \vec{x}) := \begin{cases} \min\{m \in \mathbb{N} \mid f(m, \vec{x}) = 0\} & \text{, falls } \min\{m \in \mathbb{N} \mid f(m, \vec{x}) = 0\} < n \\ n & \text{, sonst} \end{cases}$$

für eine primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$

μ^{b} ist eine Variante des μ-Operators und wird auch als *beschränkter μ-Operator* bezeichnet. Die Definition einer Funktion durch μ^{b} nennt man -analog zur (unbeschränkten) Minimierung durch den (unbeschränkten) μ-Operator- Definition durch *beschränkte Minimierung.*

Lösungsvorschlag

Zur besseren Lesbarkeit behandeln wir $\vec{x}$ bei Projektionen wie ein einzelnes Argument.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}_2^{k+2}(a, b, \vec{x}) := \mathrm{S}(\mathrm{P}_2^{k+2}(a, b, \vec{x})) && \text{(Einsetzung)}\\
&f'(a, b, \vec{x}) := f(\mathrm{P}_2^{k+2}(a, b, \vec{x}), \mathrm{P}_3^{k+2}(a, b, \vec{x})) && \text{(Einsetzung)}\\
&g(a, b, \vec{x}) := \mathrm{if}(f'(a, b, \vec{x}), \mathrm{S}_2^{k+2}(a, b, \vec{x}), \mathrm{P}_2^{k+2}(a, b, \vec{x})) && \text{(Einsetzung)}\\
&d(a, b, \vec{x}) := minus(\mathrm{P}_2^{k+2}(a, b, \vec{x}), \mathrm{P}_1^{k+2}(a, b, \vec{x})) && \text{(Einsetzung)}\\
&h(a, b, \vec{x}) := \mathrm{if}(d(a, b, \vec{x}), \mathrm{P}_1^{k+2}(a, b, \vec{x}), g(a, b, \vec{x})) && \text{(Einsetzung)}\\
&\mu^{\mathsf{b}} f(0, \vec{x}) := \mathrm{C}_0^k(\vec{x}) &&\\
&\mu^{\mathsf{b}} f(x + 1, \vec{x}) := h(\mu^{\mathsf{b}} f(x, \vec{x}), x, \vec{x}) && \text{(primitive Rekursion)}
\end{aligned}$$

5.

$$\mathrm{half}(x) := \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

Hinweis: Verwenden Sie μ^{b} aus der vorhergehenden Teilaufgabe.

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
&g'(n, x) := \mathrm{times}(\mathrm{C}_2^2(n, x), \mathrm{P}_1^2(n, x)) && \text{(Einsetzung)}\\
&g(n, x) := \mathrm{S}(g'(n, x)) && \text{(Einsetzung)}\\
&h(n, x) := \mathrm{minus}(\mathrm{P}_2^2(n, x), g(n, x)) && \text{(Einsetzung)}\\
&\mathrm{half}(x) := \mu^{\mathsf{b}} h(\mathrm{P}_1^1(x), \mathrm{P}_1^1(x)) && \text{(bechränkte Minimierung)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3 (Paar-Funktion und Projektionen sind primitiv-rekursiv)

Nun sind alle Hilfsfunktionen eingeführt, um nachzuweisen, dass die Paar-Funktion π^2 und ihre Projektionen π_1^2 und π_2^2 primitiv rekursiv sind.

Zeigen Sie: Die Paar-Funktion π^2 und ihre Projektionsfunktionen π_1^2 und π_2^2 sind primitiv rekursiv.
Hinweis: Es gilt

$$\frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n_1+n_2} i \text{ also } \pi^2(n_1,n_2) = n_1 + \sum_{i=0}^{n_1+n_2} i$$

Lösungsvorschlag

Die Paar-Funktion lässt sich durch Einsetzung definieren:

$$\begin{aligned}
s(x,y) &:= \mathrm{S}(\mathrm{plus}(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
p(x,y) &:= \mathrm{times}(\mathrm{plus}(x,y), s(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
h(x,y) &:= \mathrm{half}(p(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
\pi^2(x,y) &:= \mathrm{plus}(h(x,y), \mathrm{P}_1^2(x,y)) && \text{(Einsetzung)}
\end{aligned}$$

Für die Projektionsfunktionen betrachten wir

$$z := \pi^2(n_1,n_2) = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} + n_1 = n_1 + \sum_{i=0}^{n_1+n_2} i$$

Gelingt es, aus z durch primitiv rekursive Funktionen $m := n_1 + n_2$ zu bestimmen, so muss von z nur $\mathrm{sum}(m)$ abgezogen werden, um n_1 zu erhalten. Weiter erhält man dann $n_2 = m - n_1$.

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n_1+n_2} i \leq z < \sum_{i=0}^{n_1+n_2+1} i,$$

denn $n_1 + n_2 \leq n_1$ und $n_1 < n_1 + n_2 + 1$. Damit folgt

$$m = n_1 + n_2 = \max\left\{ j \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{j} i \leq z \right\} = \min\left\{ j \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{j+1} i > z \right\}$$

Außedem ist

$$\sum_{i=0}^{j+1} i > z \Leftrightarrow g(j,z) = 0 \text{ für } g(x,y) := \mathrm{minus}(\mathrm{S}(\mathrm{P}_2^2(x,y)), \mathrm{sum}(\mathrm{S}(\mathrm{P}_1^2(x,y))))$$

Wegen $j \leq z$ ist dann $m = \mu^{\mathsf{b}} g(z+1, z)$. Damit lassen sich die Projektionen wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_1^2(x,y) &:= \mathrm{S}(\mathrm{P}_1^2(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
\mathrm{S}_2^2(x,y) &:= \mathrm{S}(\mathrm{P}_2^2(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
s'(x,y) &:= \mathrm{sum}(\mathrm{S}_1^2(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
g(x,y) &:= \mathrm{minus}(\mathrm{S}_2^2(x,y), s'(x,y)) && \text{(Einsetzung)}\\
h(x) &:= \mu^{\mathsf{b}} g(\mathrm{S}(x), \mathrm{P}_1^1(x))) && \text{(beschränkte Minimierung)}\\
s(x) &:= \mathrm{sum}(h(x)) && \text{(Einsetzung)}\\
\pi_1^2(x) &:= \mathrm{minus}(\mathrm{P}_1^1(x), s(x)) && \text{(Einsetzung)}\\
\pi_2^2(x) &:= \mathrm{minus}(h(x), \pi_1^2(x)) && \text{(Einsetzung)}
\end{aligned}$$