

# Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser  
Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

## Lösungsvorschlag zu Übung 4

---

---

### Lösungsvorschlag

#### Aufgabe 4.1 (Quiz)

Die folgenden Quiz-Aufgaben sollen Ihnen dabei helfen, eventuelle fundamentale Wissenslücken im Bereich "Berechenbarkeitstheorie" aufzudecken. Verwenden Sie daher nicht mehr als 10 Minuten der Präsenzübung, um diese Fragen zu beantworten. Wenn Sie länger brauchen oder nicht alle Fragen beantworten können, bearbeiten Sie zunächst die anderen Aufgaben dieses Übungsblattes und denken Sie später in einer ruhigen Minute über die Quizfragen nach. Nutzen Sie auch die Sprechstunde, um offene Fragen zu klären.

#### Lösungsvorschlag

1. Jede totale Funktion ist berechenbar.  
 richtig       falsch
2. Jede berechenbare Funktion ist total.  
 richtig       falsch
3. Jede Funktion mit endlichem Definitionsbereich ist berechenbar.  
 richtig       falsch
4. Jede Funktion mit endlichem Bildbereich ist berechenbar.  
 richtig       falsch
5. Jede Funktion  $f$  mit  $Bild(f) = \mathbb{N}$  ist berechenbar.  
 richtig       falsch
6. Jede Funktion  $f$  mit  $Def(f) = \mathbb{N}$  ist berechenbar.  
 richtig       falsch
7. Jede abzählbare Menge ist rekursiv aufzählbar.  
 richtig       falsch
8. Die Vereinigung von zwei semi-entscheidbaren Mengen ist semi-entscheidbar.  
 richtig       falsch
9. Der Schnitt von zwei semi-entscheidbaren Mengen ist semi-entscheidbar.  
 richtig       falsch

10. Das Komplement einer semi-entscheidbaren Menge ist semi-entscheidbar.

- richtig       falsch

### Aufgabe 4.2 (Graph einer berechenbaren Funktion)

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine totale einstellige arithmetische Funktion. Wir kodieren den Graphen von  $f$  durch  $M_f := \{\pi^2(x, y) \in \mathbb{N} \mid x \in \text{Def}(f) \wedge y = f(x)\}$ .

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $f$  ist berechenbar
- $M_f$  ist rekursiv aufzählbar
- $M_f$  ist entscheidbar

### Lösungsvorschlag

a)  $\Rightarrow$  b) Die Funktion  $\alpha_f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N}. \alpha_f(n) := \pi^2(n, f(n))$  ist offenbar berechenbar, da  $f$  und  $\pi^2$  berechenbar sind. Da  $f$  total ist, gilt  $\forall n \in \mathbb{N}. \alpha_f(n) \in M_f$ , also  $\text{Bild}(\alpha_f) \subseteq M_f$ . Außerdem gilt für jedes  $x \in M_f$ , dass  $\pi_2^2(x) = f(\pi_1^2(x))$ , d. h.  $x = \pi^2(\pi_1^2(x), f(\pi_1^2(x))) = \alpha_f(\pi_1^2(x))$ , also  $M_f \subseteq \text{Bild}(\alpha_f)$ . Also ist  $M_f$  durch  $\alpha_f$  rekursiv aufzählbar.

b)  $\Rightarrow$  a) Mit Hilfe einer berechenbaren Aufzählfunktion  $\alpha_{M_f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  von  $M_f$  lässt sich  $f$  wie folgt berechnen:

Um  $f(x')$  für ein  $x' \in \mathbb{N}$  zu berechnen, zählt man die Elemente  $\pi^2(x, y)$  von  $M_f$  mit Hilfe von  $\alpha_{M_f}$  auf. Dabei prüft man, ob  $x' = x$  gilt. Ist  $x' \in \text{Def}(f)$ , so findet man ein solches Paar in der Aufzählung. Andernfalls zählt man alle Elemente auf, ohne je solch ein Paar zu finden und erhält das korrekte Ergebnis  $f(x) = \perp$ . Hat man also  $r = \pi^2(x', y)$  durch die Aufzählung gefunden, so gilt  $y = f(x')$ , man liefert also einfach  $\pi_2^2(r)$  als Ergebnis.

a)  $\Rightarrow$  c) Für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist  $n \in M_f \Leftrightarrow f(\pi_1^2(n)) = \pi_2^2(n)$ . Da sich  $f(\pi_1^2(n))$  und  $\pi_2^2(n)$  offenbar berechnen lassen, und alle dabei verwendeten Funktionen total sind, lässt sich dieser Vergleich immer durchführen. Damit ist  $M_f$  entscheidbar.

c)  $\Rightarrow$  b) Wenn  $M_f$  entscheidbar ist, dann ist  $M_f$  auch semi-entscheidbar und damit rekursiv aufzählbar.

2. Welche der von Ihnen in 1. bewiesenen Implikationen verlieren ihre Gültigkeit, wenn  $f$  nicht total ist? Zeigen Sie mit Hilfe einer geeignet gewählten partiellen Funktion, dass die drei Aussagen für partielle Funktionen nicht äquivalent sind.

### Lösungsvorschlag

a)  $\Rightarrow$  b) Diese Aussage gilt weiterhin. Dazu zeigen wir, dass  $M_f$  semi-entscheidbar ist, wenn  $f$  berechenbar ist. Für ein gegebenes  $n \in \mathbb{N}$  berechnen wir  $f(\pi_1^2(n))$ . Wenn dies nicht terminiert, dann gilt  $n \notin M_f$ , d. h. das Semi-Entscheidungsverfahren braucht nicht zu terminieren. Ansonsten vergleichen wir das Ergebnis mit  $\pi_2^2(n)$  und geben bei Gleichheit 1 zurück, andernfalls 0. Damit ist  $M_f$  semi-entscheidbar also auch rekursiv aufzählbar.

- b)  $\Rightarrow$  a) Der Beweis aus 1. kann hier übernommen werden, da die Totalität gar nicht verwendet wurde.
- a)  $\Rightarrow$  c) Diese Implikation gilt für partielle  $f$  im Allgemeinen nicht. Betrachten wir z. B. die berechenbare Semi-Entscheidungsfunktion  $f = \tilde{\chi}_S$  des speziellen Halteproblems  $S$ . Wenn  $M_{\tilde{\chi}_S}$  entscheidbar wäre, könnten wir wegen  $n \in S \Leftrightarrow \tilde{\chi}_S(n) = 1 \Leftrightarrow \pi^2(n, 1) \in M_{\tilde{\chi}_S}$  auch  $S$  entscheiden. Dies ist aber bekanntlich unmöglich.
- c)  $\Rightarrow$  b) Auch diese Aussage gilt ebenfalls für partielle Funktionen.

### Aufgabe 4.3 (Entscheidbarkeit)

Untersuchen Sie die Entscheidbarkeit des Problems  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n) = n\}$ .

1. Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass  $M$  nicht entscheidbar ist.

#### Lösungsvorschlag

Angenommen,  $M$  sei entscheidbar, dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_M$  mit

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n \in M \\ 0 & , \text{ falls } n \notin M \end{cases}$$

berechenbar. Damit ist offenbar auch die Funktion  $f$  mit

$$f(n) := \begin{cases} n + 1 & , \text{ falls } \chi_M(n) = 1 \\ n & , \text{ falls } \chi_M(n) = 0 \end{cases}$$

berechenbar. Also gibt es ein  $n' \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi_{n'} = f$ .

Nun untersuchen wir  $f(n')$ . Angenommen,  $f(n') = n'$ , also  $\varphi_{n'}(n') = n'$ . Nach Definition von  $f$  folgt damit  $f(n') = n' + 1 \neq n'$ , ein Widerspruch. Andernfalls gilt  $f(n') \neq n'$ , also  $\varphi_{n'}(n') \neq n'$ . Nach Definition von  $f$  folgt dann  $f(n') = n'$ , ebenfalls ein Widerspruch. Da in allen Fällen ein Widerspruch auftritt, muss die Annahme,  $f$  sei berechenbar, falsch gewesen sein. Da diese aber eine Konsequenz der Entscheidbarkeit von  $M$  war, folgt damit, dass  $M$  nicht entscheidbar sein kann.

2. Zeigen Sie durch Angabe eines Programms, dass  $M$  semi-entscheidbar ist.

#### Lösungsvorschlag

Das folgende Programm berechnet eine semi-charakteristische Funktion von  $M$ .

```

procedure SEMI_DECIDE_M(n)
begin var res;
  if APPLY(PAIR2(n, n)) = n then res := 1 else res := 0 end_if;
  return(res)
end

```

3. Ist  $\overline{M}$  semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösungsvorschlag**

$\overline{M}$  kann nicht semi-entscheidbar sein. Wäre es semi-entscheidbar, so wäre wegen der Semi-Entscheidbarkeit von  $M$  dann  $M$  auch entscheidbar (Satz 8.7). Da  $M$  aber nicht entscheidbar ist, kann  $\overline{M}$  nicht semi-entscheidbar sein.