Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Übung 3

Lösungsvorschlag

Aufgabe 3.1 (universelle Funktionen und Berechenbarkeit)

Das Konzept einer universellen Funktion aus Definition 6.1 kann wie folgt verallgemeinert werden:

> *Gegeben sei eine Familie $\mathcal{F}$ von einstelligen arithmetischen Funktionen. Wir nennen eine Funktion $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine* universelle Funktion für $\mathcal{F}$ *genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
>
> *(i) Für jedes $e \in \mathbb{N}$ gilt $f_e \in \mathcal{F}$, wobei $f_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ definiert ist durch $f_e(n) = F(\pi^2(e, n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
>
> *(ii) Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}$ existiert eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $f = f_e$.*

1. Geben Sie eine universelle Funktion F für die Familie $\mathcal{F} = \{x, x^3, x^5, x^7, x^9, \ldots\}$ an und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Auswahl. (Mit x^i meinen wir hier die arithmetische Funktion, die ein $x \in \mathbb{N}$ auf x^i abbildet.)

   #### Lösungsvorschlag

   Wir wählen als universelle Funktion die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $F(\pi^2(e, n)) := n^{2e+1}$. (Dies lässt sich äquivalent formulieren durch $F(m) := (\pi^2_2(m))^{2 \cdot \pi^2_1(m)+1}$). Die Funktion F ist tatsächlich universell:

   (i) Sei $e \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $f_e(x) = F(\pi^2(e, x)) = x^{2e+1}$. Der Exponent $2e + 1$ ist für alle $e \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, d. h. $f_e \in \mathcal{F}$.

   (ii) Sei $f \in \mathcal{F}$ gegeben. Dann gilt „$f = x^k$" für ein ungerades $k \in \mathbb{N}$. Wir können k also in der Form $k = 2e+1$ für ein $e \in \mathbb{N}$ darstellen. Für dieses e gilt dann $f_e(x) = F(\pi^2(e, x)) = x^{2e+1} = x^k$, d. h. $f = f_e$.

2. Existiert für die in 1. beschriebene Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen nur eine einzige universelle Funktion?

Lösungsvorschlag

Die der oben genannten universellen Funktion F zugrunde liegende Aufzählung der Funktionen in $\mathcal{F}$ ordnet diese nach der Größe des Exponenten:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & x \\ 1 & \mapsto & x^3 \\ 2 & \mapsto & x^5 \\ & \vdots & \end{array}$$

Wir können diese Funktionen aber auch in einer anderen Reihenfolge aufzählen, z. B.

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & x^3 \\ 1 & \mapsto & x \\ 2 & \mapsto & x^7 \\ 3 & \mapsto & x^5 \\ 4 & \mapsto & x^{11} \\ & \vdots & \end{array}$$

Damit erhalten wir auch eine alternative universelle Funktion F':

$$F'(\pi^2(e,n)) := \begin{cases} n^{2e+3} & \text{falls } e \text{ gerade} \\ n^{2e-1} & \text{falls } e \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wie bei 1. kann man auch hier leicht zeigen, dass die Bedingungen (i) und (ii) für F' erfüllt sind, so dass F' tatsächlich eine universelle Funktion für $\mathcal{F}$ ist. Also gibt es mehr als nur eine einzige universelle Funktion für $\mathcal{F}$.

3. Zeigen Sie, dass jede endliche nicht-leere Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen eine universelle Funktion F besitzt.

Lösungsvorschlag

Wenn $\mathcal{F}$ endlich und nicht leer ist, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{F}$ in der Form $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ dargestellt werden kann. Die universelle Funktion F kann mit Hilfe einer Fallunterscheidung die richtige Funktion f_e auswählen und diese dann auf das Argument anwenden:

$$F(\pi^2(e,n)) := \begin{cases} f_0(n) & \text{falls } e = 0 \bmod k \\ f_1(n) & \text{falls } e = 1 \bmod k \\ \quad\vdots & \\ f_{k-1}(n) & \text{falls } e = k-1 \bmod k \end{cases}$$

Da $\mathcal{F}$ endlich ist, ist die angegebene Beschreibung von F auch endlich. Die Forderungen (i) und (ii) sind offensichtlich erfüllt bzw. leicht nachzuweisen.

4. Sei $\mathcal{F}$ nun eine Familie von *totalen* Funktionen, die eine universelle Funktion F besitzt. Beweisen Sie, dass es dann auch eine totale Funktion gibt, die nicht zu $\mathcal{F}$ gehört.

Lösungsvorschlag

Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $f(m) := F(\pi^2(m, m)) + 1 = f_m(m) + 1$. Da alle f_e total sind, müssen auch F und f total sein. Wenn es ein $e \in \mathbb{N}$ gäbe mit $f_e = f$ (d. h. wenn $f \in \mathcal{F}$ wäre), dann müsste insbesondere $F(\pi^2(e, e)) = f_e(e) = f(e) = F(\pi^2(e, e)) + 1$ gelten. Da $0 \neq 1$, kann es kein solches $e \in \mathbb{N}$ geben, d. h. $f \notin \mathcal{F}$.

5. Zeigen Sie, dass die Familie aller totalen und berechenbaren Funktionen keine berechenbare universelle Funktion besitzt.

Lösungsvorschlag

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, die universelle Funktion $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ der Familie $\mathcal{F}$ aller totalen und berechenbaren Funktionen wäre berechenbar. Damit wäre auch die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(m) := F(\pi^2(m, m)) + 1 = f_m(m) + 1$ total und berechenbar, also $f \in \mathcal{F}$. Also müsste es ein $e \in \mathbb{N}$ geben mit $f_e = f$. Aus dem gleichen Grund wie in 4. ist diese Gleichung unerfüllbar, d. h. die universelle Funktion F kann nicht berechenbar sein.

6. Beweisen Sie, dass es eine unendliche Familie $\mathcal{F}$ totaler und berechenbarer Funktionen gibt, welche eine berechenbare universelle Funktion besitzt. Geben Sie hierzu eine geeignete Familie $\mathcal{F}$ und eine entsprechende universelle Funktion an.

Lösungsvorschlag

Wir wählen die Familie $\mathcal{F}$ der Potenzfunktionen aus 1. Diese Menge ist unendlich, alle Potenzfunktionen sind total und berechenbar, und die in 1. konstruierte universelle Funktion ist ebenfalls berechenbar, da die verwendeten Projektionen und arithmetischen Funktionen berechenbar sind.

Anmerkung: Aus 4. ergibt sich, dass die Menge aller *totalen* Funktionen keine universelle Funktion besitzt. Wir wissen bereits, dass die Menge aller *berechenbaren* Funktionen eine berechenbare universelle Funktion hat. Schränken wir diese Menge jedoch auf die *totalen und berechenbaren* Funktionen ein, dann besitzt diese eingeschränkte Menge nach 5. keine berechenbare universelle Funktion mehr. Eine weitere Einschränkung auf eine Teilmenge der totalen und berechenbaren Funktionen kann allerdings nach 6. wieder eine berechenbare universelle Funktion erlauben.

Aufgabe 3.2 (universelle Funktion und Paar-Funktion)

Wir betrachten eine beliebige Familie $\mathcal{F}$ von einstelligen arithmetischen Funktionen, und $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ sei eine universelle Funktion für $\mathcal{F}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ *seine eigene universelle Funktion enthält*, genau dann, wenn $F \in \mathcal{F}$ gilt.

1. Enthält die Familie $\mathcal{U}$ aller einstelligen berechenbaren Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ihre eigene universelle Funktion?

Lösungsvorschlag

Natürlich, denn die universelle Funktion $\mathsf{u} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ aus Definition 6.1 ist berechenbar, d. h. $\mathsf{u} \in \mathcal{U}$.

2. Sei $\mathcal{G}$ eine Familie totaler (nicht notwendigerweise berechenbarer) Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $\mathcal{G}$ ist abgeschlossen unter Komposition, d. h. für alle $f, g \in \mathcal{G}$ gilt $f \circ g \in \mathcal{G}$.

   (ii) $\mathrm{S} \in \mathcal{G}$, wobei S den Nachfolger einer natürlichen Zahl berechnet, also $\mathrm{S}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Für die Funktion $\hat{\pi} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\hat{\pi}(x) = \pi^2(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$, gilt $\hat{\pi} \in \mathcal{G}$.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht ihre eigene universelle Funktion enthalten kann.

   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\mathrm{S} \circ G \circ \hat{\pi}$ für die universelle Funktion G von $\mathcal{G}$. Überlegen Sie sich auch, wie diese vorgeschlagene Funktion mit dem Prinzip einer Diagonalisierung zusammenhängt.

Lösungsvorschlag

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass G eine universelle Funktion für $\mathcal{G}$ ist mit $G \in \mathcal{G}$. Wegen $G \in \mathcal{G}$ ist G total. Da S und $\hat{\pi}$ ebenfalls total sind, ist auch $\mathrm{S} \circ G \circ \hat{\pi}$ total. Aus den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) folgt, dass $\mathrm{S} \circ G \circ \hat{\pi} \in \mathcal{G}$ gilt.

Also existiert eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{S}(G(\hat{\pi}(n))) = G(\pi^2(e, n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da G die universelle Funktion von $\mathcal{G}$ ist. Wir erhalten:

$$G(\pi^2(e, e)) = \mathrm{S}(G(\hat{\pi}(e))) = \mathrm{S}(G(\pi^2(e, e))) = G(\pi^2(e, e)) + 1$$

Da G nach Annahme total ist, müsste $0 = 1$ gelten. Wenn G also eine universelle Funktion von $\mathcal{G}$ ist, muss $G \notin \mathcal{G}$ gelten.

Dieser Beweis ist ein klassischer Diagonalisierungsbeweis: Wir nehmen $G \in \mathcal{G}$ an und bilden eine neue Funktion, die „auf der Diagonalen“ – ausgedrückt durch $\hat{\pi}(x)$ – einen von $G(\hat{\pi}(x))$ verschiedenen Wert – realisiert mit der Funktion S – wählt. Diese Funktion muss dann auch in $\mathcal{G}$ sein, und wir betrachten diese an der Stelle der „eigenen Kodenummer“.