

# Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser  
Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

## Lösungsvorschlag zu Übung 2

---

---

### Lösungsvorschlag

#### Aufgabe 2.1 (Paar-Funktion)

1. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Paar-Funktion  $\pi^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  aus Definition 4.2 für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ :

- a)  $\pi^2(n_1 + 1, n_2) = \pi^2(n_1, n_2 + 1) + 1$
- b)  $\pi^2(0, n_2 + 1) = \pi^2(n_2, 0) + 1$
- c)  $\pi^2(n_1, n_2) \geq n_1$
- d)  $\pi^2(n_1, n_2) \geq n_2$

Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung von (1.) und (2.) auch „graphisch“ anhand von Abb. 4.1.

2. Beweisen Sie Satz 4.3 aus dem Skript, d. h. zeigen Sie, dass die Paar-Funktion  $\pi^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\pi^2(n_1, n_2) := \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) + n_1$  eine surjektive,  $\mathcal{P}$ -berechenbare Gödelisierung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist.

*Hinweis:* Um die Injektivität von  $\pi^2$  zu zeigen, können Sie folgendermaßen vorgehen: Definieren Sie eine fundierte, asymmetrische, transitive und totale Ordnungsrelation  $\prec \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$  durch

$$(n_1, n_2) \prec (n'_1, n'_2) \iff d(n_1, n_2) < d(n'_1, n'_2) \vee (d(n_1, n_2) = d(n'_1, n'_2) \wedge n_1 < n'_1),$$

wobei  $d : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $d(n_1, n_2) := n_1 + n_2$  definiert ist.  $d$  bestimmt die Nummer der Nebendiagonalen des Paares  $(n_1, n_2)$ . Verdeutlichen Sie sich die Ordnungsrelation anhand Abb. 4.1 im Skript.

Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe ein  $\prec$ -minimales Paar  $(n_1, n_2)$  mit folgender Eigenschaft:

$$(\dagger) \quad \text{es gibt ein Paar } (n'_1, n'_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } (n'_1, n'_2) \neq (n_1, n_2) \text{ und } \pi^2(n'_1, n'_2) = \pi^2(n_1, n_2)$$

Wir zeigen mit 1, dass es dann ein gemäß  $\prec$  kleineres Paar  $(n''_1, n''_2) \in \mathbb{N}^2$  gibt, das  $(\dagger)$  erfüllt und erhalten damit den gewünschten Widerspruch.

#### Lösungsvorschlag

1. a)  $\pi^2(n_1 + 1, n_2) = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 2) + n_1 + 1 = \pi^2(n_1, n_2 + 1) + 1$

- b)  $\pi^2(0, n_2 + 1) = \frac{1}{2}(n_2 + 1)(n_2 + 2) = \frac{1}{2}(n_2^2 + 3n_2 + 2)$   
 $\pi^2(n_2, 0) + 1 = \frac{1}{2}n_2(n_2 + 1) + n_2 + 1 = \frac{1}{2}(n_2^2 + n_2) + n_2 + 1 = \frac{1}{2}(n_2^2 + 3n_2 + 2)$
- c)  $\pi^2(n_1, n_2) = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) + n_1 \geq n_1$
- d) Wegen  $x^2 \geq x$  für alle  $x \in \mathbb{N}$  gilt auch  $\frac{1}{2}(x^2 + x) \geq \frac{1}{2}(x + x) = x$ . Dies liefert:

$$\begin{aligned} \pi^2(n_1, n_2) &= \frac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) + n_1 \\ &= \frac{1}{2}(n_1^2 + n_1 + 2n_1n_2 + n_2^2 + n_2) + n_1 \\ &\geq \frac{1}{2}(n_2^2 + n_2) \\ &\geq n_2 \end{aligned}$$

(1.) bedeutet, dass der Wert der Paar-Funktion um 1 wächst, wenn wir eine Zeile nach unten und eine Spalte nach links in der Tabelle in Abb. 4.1 gehen. (2.) bedeutet, dass wir den um 1 größeren Wert der Paar-Funktion in der obersten Zeile der nächsten Nebendiagonalen finden, wenn wir in der ersten Spalte sind.

2.  $\pi^2$  ist eine surjektive,  $\mathcal{P}$ -berechenbare Gödelisierung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

- a)  $\pi^2$  ist  $\mathcal{P}$ -berechenbar: Addition und Multiplikation sind  $\mathcal{P}$ -berechenbar (siehe Lösung zu Aufgabe 1.2). Die Halbierung einer geraden natürlichen Zahl ist  $\mathcal{P}$ -berechenbar durch

```

procedure HALF(y) <=
begin var n, res;
  n := y; res := 0;
  while n & PRED(n) do
    n := PRED(PRED(n));
    res := SUCC(res)
  end_while;
  return(res)
end

```

Es gilt  $\llbracket \text{HALF} \rrbracket(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , denn für  $n \geq 2$  ist  $\lfloor \frac{(n-2)+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1$ . Mit Hilfe von Addition, Multiplikation und HALF lässt sich  $\text{PAIR}^2 \in \mathcal{P}[2]$  implementieren, also ist  $\pi^2 = \llbracket \text{PAIR}^2 \rrbracket$   $\mathcal{P}$ -berechenbar.

- b)  $\pi^2$  ist surjektiv: Wir nehmen an, es gäbe eine kleinste natürliche Zahl  $m$ , so dass  $\pi^2(n_1, n_2) \neq m$  für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  gilt. Offenbar ist  $m \neq 0$ , so dass es für  $m - 1$  also ein Paar  $(n'_1, n'_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $\pi^2(n'_1, n'_2) = m - 1$  gibt.

1. Fall:  $n'_2 = 0$ . Dann wäre  $\pi^2(0, n'_1 + 1) = \pi^2(n'_1, 0) + 1 = (m - 1) + 1 = m$  mit (a)(2.), d. h. es gäbe ein Paar, das durch  $m$  kodiert wird, im Widerspruch zur Annahme.
2. Fall:  $n'_2 \neq 0$ . Dann wäre  $\pi^2(n'_1 + 1, n'_2 - 1) = \pi^2(n'_1, n'_2) + 1 = (m - 1) + 1 = m$  mit (a)(1.), d. h. es gäbe ein Paar, das durch  $m$  kodiert wird, im Widerspruch zur Annahme.

Also kann es kein  $m \in \mathbb{N}$  geben, das nicht im Bildbereich von  $\pi^2$  ist, d. h.  $\pi^2$  ist surjektiv.

c)  $\pi^2$  ist eine Gödelisierung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

$\pi^2$  ist injektiv: Die Ordnung  $\prec$  ordnet die Paare aus  $\mathbb{N}^2$  genau so, dass sie von  $\pi^2$  aufsteigend durchnummeriert werden. Dass  $\pi^2$  die Paare tatsächlich in dieser Reihenfolge nummeriert (und nicht nur in dem Ausschnitt in der Tabelle in Abb. 4.1), muss allerdings allgemein gezeigt werden.

Wir verfahren gemäß Hinweis und nehmen an, es gäbe ein  $\prec$ -minimales Paar  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ , das  $(\dagger)$  erfüllt. Sei  $(n'_1, n'_2) \in \mathbb{N}^2$  das entsprechende Paar mit  $\pi^2(n'_1, n'_2) = \pi^2(n_1, n_2)$ . Offensichtlich ist  $(n_1, n_2) \neq (0, 0) \neq (n'_1, n'_2)$ . Wir machen eine Fallunterscheidung für die Positionen der beiden Paare innerhalb der Tabelle:

1. Fall:  $n_1 = 0 = n'_1$ . Mit (a)(2.) gilt dann  $\pi^2(0, n_2) = \pi^2(n_2 - 1, 0) + 1 = \pi^2(n'_2 - 1, 0) + 1 = \pi^2(0, n'_2)$ , d. h. das Paar  $(n_2 - 1, 0) \prec (n_1, n_2)$  würde bereits  $(\dagger)$  erfüllen.  $\zeta$
2. Fall:  $n_1 \neq 0 \neq n'_1$ . Mit (a)(1.) gilt dann  $\pi^2(n_1, n_2) = \pi^2(n_1 - 1, n_2 + 1) + 1 = \pi^2(n'_1 - 1, n'_2 + 1) + 1 = \pi^2(n'_1, n'_2)$ , d. h. das Paar  $(n_1 - 1, n_2 + 1) \prec (n_1, n_2)$  würde bereits  $(\dagger)$  erfüllen.  $\zeta$
3. Fall:  $n_1 = 0 \neq n'_1$ . Mit (a)(2.) und (a)(1.) gilt dann  $\pi^2(0, n_2) = \pi^2(n_2 - 1, 0) + 1 = \pi^2(n'_1 - 1, n'_2 + 1) + 1 = \pi^2(n'_1, n'_2)$ , d. h. das Paar  $(n_2 - 1, 0) \prec (n_1, n_2)$  würde bereits  $(\dagger)$  erfüllen.  $\zeta$
4. Fall:  $n_1 \neq 0 = n'_1$ . Mit (a)(1.) und (a)(2.) gilt dann  $\pi^2(n_1, n_2) = \pi^2(n_1 - 1, n_2 + 1) + 1 = \pi^2(n'_2 - 1, 0) + 1 = \pi^2(0, n'_2)$ , d. h. das Paar  $(n_1 - 1, n_2 + 1) \prec (n_1, n_2)$  würde bereits  $(\dagger)$  erfüllen.  $\zeta$

$\pi^2$  ist algorithmisch:  $\pi^2$  ist  $\mathcal{P}$ -berechenbar, also insbesondere algorithmisch.

$\pi^2 \text{?} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  ist berechenbar: Wir haben die Surjektivität von  $\pi^2$  bereits gezeigt, also ist  $\pi^2 \text{?}(m) = 1$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Diese konstante Funktion ist offensichtlich berechenbar.

$\pi^{-2} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist algorithmisch: Das Paar  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $\pi^2(n_1, n_2) = m$  für gegebenes  $m \in \mathbb{N}$  lässt sich wie im Skript angegeben durch  $(n_1, n_2) = (\pi_1^2(m), \pi_2^2(m))$  berechnen.

## Aufgabe 2.2 (Stelligkeit von Funktionen)

Geben Sie  $\mathcal{P}[1]$ -Programme zur Berechnung von Addition und Multiplikation an, also Programme `PLUS'` und `TIMES'` mit

$$\forall x, y \in \mathbb{N}. \llbracket \text{PLUS}' \rrbracket(\pi^2(x, y)) = x + y \text{ und } \forall x, y \in \mathbb{N}. \llbracket \text{TIMES}' \rrbracket(\pi^2(x, y)) = x \cdot y.$$

Sie können dabei die Hilfsprozeduren `PAIR2`, `PAIR12` und `PAIR22` aus Satz 4.3 und Satz 4.4 ohne Angabe ihrer Definitionen verwenden.

**Lösungsvorschlag**

```

procedure PLUS'(x) <=
begin var n, m;
  n := PAIR12(x); m := PAIR22(x);
  while n do
    n := PRED(n);
    m := SUCC(m)
  end_while;
  return(m)
end

```

```

procedure TIMES'(x) <=
begin var n, res;
  n := PAIR12(x); res = 0;
  while n do
    n := PRED(n);
    res := PLUS'(PAIR2(res, PAIR22(x)))
  end_while;
  return res
end

```

**Aufgabe 2.3** (Abzählbarkeit)

Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine Bijektion zwischen  $M$  und  $\mathbb{N}$  gibt. Eine Menge heißt *abzählbar* oder *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. (Eine nicht abzählbare Menge nennt man auch *überabzählbar*.)

Alternativ kann man also Abzählbarkeit wie folgt charakterisieren: Eine Menge  $M$  ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $M$  gibt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen ist ebenfalls abzählbar.
2. Die Vereinigung von zwei überabzählbaren Mengen ist überabzählbar.
3. Die Menge aller partiellen Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  mit endlichen Definitionsbereichen ist abzählbar unendlich.
4. Die Menge aller Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  mit endlichen Bildbereichen ist überabzählbar.

**Lösungsvorschlag**

1. Seien  $M_1$  und  $M_2$  abzählbar, dann existieren zwei surjektive Funktionen  $f_1 : \mathbb{N} \mapsto M_1$  und  $f_2 : \mathbb{N} \mapsto M_2$ . Wir definieren eine Funktion  $f : \mathbb{N} \mapsto M_1 \cup M_2$  wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} f_1\left(\frac{n}{2}\right) & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ f_2\left(\frac{n-1}{2}\right) & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei  $m \in M_1 \cup M_2$ . Wir zeigen, dass es ein  $n' \in \mathbb{N}$  gibt mit  $f(n') = m$ .

1. Fall:  $m \in M_1$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f_1(n) = m$ . Es gilt  $f(2n) = f_1(n) = m$ .

2. Fall:  $m \in M_2$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f_2(n) = m$ . Es gilt  $f(2n+1) = f_2(n) = m$ .

Also ist  $f$  surjektiv, d. h.  $M_1 \cup M_2$  ist abzählbar.

2. Seien  $M_1$  und  $M_2$  überabzählbare Mengen. Nehmen wir an,  $M_1 \cup M_2$  wäre abzählbar. Da  $M_1$  und  $M_2$  jeweils Teilmengen von  $M_1 \cup M_2$  sind, wären sie gemäß (2) ebenfalls abzählbar. Sie sind jedoch überabzählbar. Also muss auch  $M_1 \cup M_2$  überabzählbar sein.

3. Eine partielle Funktion mit endlichem Definitionsbereich hat natürlich auch einen endlichen Bildbereich. Man kann jeder solchen Funktion  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  eine kleinste natürliche Zahl  $k$  zuordnen, so dass alle Zahlen aus  $Def(f)$  und  $Bild(f)$  kleiner oder gleich  $k$  sind. Dieses  $k$  ist also die kleinste obere gemeinsame Schranke für die Werte aus  $Def(f)$  und  $Bild(f)$ .

Die Menge der Funktionen  $f$ , denen die gleiche Zahl  $k$  zugeordnet wird, ist endlich. Jede dieser Funktionen kann nämlich in Form einer Wertetabelle dargestellt werden. Die Zahl der Zeilen in der Tabelle ist höchstens  $k + 1$ , und für jeden Eintrag in den beiden Spalten gibt es höchstens  $k + 1$  Möglichkeiten.

Diese Wertetabellen können wir für gegebenes  $k \in \mathbb{N}$  systematisch aufzählen. Wenn wir dies systematisch für  $k = 0, 1, 2, \dots$  durchführen, wird jede partielle arithmetische Funktion  $f$  mit endlichem Definitionsbereich in dieser Aufzählung vorkommen. Damit ist die Abzählbarkeit der betreffenden Menge gezeigt.

Die Menge ist abzählbar unendlich, weil es unendlich viele Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  mit endlichem Definitionsbereich gibt. Zum Beispiel können wir eine unendliche Familie  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von arithmetischen Funktionen angeben mit  $Def(f_i) = \{0\}$  und  $Bild(f_i) = \{i\}$ , indem wir  $f_i(0) := i$  definieren.

4. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass die Menge aller Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  mit endlichen Bildbereichen abzählbar wäre. Sei  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  eine Aufzählung dieser Funktionen. Wir konstruieren eine Funktion  $f$  mit folgender Gestalt:

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f_n(n) \neq \perp \text{ und } f_n(n) \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $Bild(f) = \{0, 1\}$ , d. h.  $f$  gehört zu der in der Aufgabe genannten Menge. Also muss  $f$  in der Aufzählung vorkommen. Sei  $m \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $f = f_m$ .

1. Fall:  $f_m(m) = \perp$ . Dann ist  $f(m) = 1 \neq \perp = f_m(m)$  im Widerspruch zu  $f = f_m$ .
2. Fall:  $f_m(m) = 0$ . Dann ist  $f(m) = 1 \neq 0 = f_m(m)$  im Widerspruch zu  $f = f_m$ .
3. Fall:  $f_m(m) = 1$ . Dann ist  $f(m) = 0 \neq 1 = f_m(m)$  im Widerspruch zu  $f = f_m$ .

Also kann die Menge aller Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  mit endlichen Bildbereichen nicht abzählbar sein, d. h. sie ist überabzählbar.