Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Hausübung 2

Hinweise

Die *korrigierten Hausübungen* werden bewertet und dienen als Grundlage zur Vergabe eines Scheins. Außerdem können Sie durch die Hausübungen einen Bonus für die Prüfung erlangen. Details finden Sie auf der Webseite der Veranstaltung.

Ihre *handschriftlichen* Lösungen für diese Hausübung geben Sie bis zum 27.06.2011 16 Uhr in Raum S202 / A312 ab. Jeder Student muss eine eigene Lösung abgeben.

Heften Sie Ihre Blätter *oben links* zusammen und versehen Sie *alle* Blätter mit Namen und Matrikel-Nummer.

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Zu diesen gehört auch die strikte Verfolgung von Plagiarismus. Mit der Abgabe einer Lösung bestätigen Sie, dass Sie der alleinige Autor des gesamten Materials sind. Bei Unklarheiten zu diesem Thema finden Sie weiterführende Informationen unter `http://www.informatik.tu-darmstadt.de/de/sonstiges/plagiarismus/` oder sprechen Sie Ihren Betreuer an.

Aufgabe 2.1 (Entscheidbarkeit) (8 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Satz von Rice, dass die folgenden Probleme nicht entscheidbar sind.

1. (2 Punkte)

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N}.\ \varphi_n(i) = 2i + 1\}$$

2. (2 Punkte)

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(2) = 4\}$$

3. (4 Punkte)

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathit{Bild}(\varphi_n) \text{ ist entscheidbar}\}$$

Aufgabe 2.2 (Semi-Entscheidbarkeit) (7 Punkte)

Betrachten Sie folgende Menge:

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \text{ ist primitiv-rekursiv }\}$$

Beweisen Sie, dass M nicht semi-entscheidbar ist. Reduzieren Sie dazu das Totalitätsproblem TOT auf M.

Aufgabe 2.3 (μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen) (15 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen μ-rekursiv sind, indem Sie jeweils eine Definition durch Einsetzung, strukturelle Rekursion oder Minimierung angeben. Geben Sie außerdem an, ob die Funktion primitiv-rekursiv ist und belegen Sie Ihre Behauptung.

Sie können in Ihren Beweisen sämtliche aus der Vorlesung als primitiv-rekursiv oder μ-rekursiv bekannten Funktionen unter Angabe der Quelle als primitiv-rekursiv beziehungsweise μ-rekursiv annehmen.

1. (3 Punkte)

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{, falls } \sqrt[3]{x} \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{, sonst} \end{cases}$$

2. (3 Punkte)

$$f_2(x, y) = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$$

3. (3 Punkte)

$$f_3(y, x) = \begin{cases} x^y & \text{, falls } y > 0 \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

4. (3 Punkte)

$$f_4(x) = \perp$$

5. (3 Punkte)

$$f_5(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \varphi_x(y) = \varphi_y(x) \neq \perp \\ \perp & \text{, sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2.4 (Turing Maschinen) (10 Punkte)

Geben Sie eine Turingmaschine $TM_{palindrom} = (Z, z_{start}, z_{stop}, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}, \square\}, \square, \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}, \delta)$ an, die berechnet, ob das Eingabewort ein Palindrom ist, d. h.

$$\phi_{TM_{palindrom}}(x) = \begin{cases} \mathsf{I} & \text{, falls } x \in \{\mathsf{O}, \mathsf{I}\}^* \text{ ein Palindrom ist} \\ \mathsf{O} & \text{, sonst} \end{cases}$$