Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Hausübung 1

Hinweise

Die *korrigierten Hausübungen* werden bewertet und dienen als Grundlage zur Vergabe eines Scheins. Außerdem können Sie durch die Hausübungen einen Bonus für die Prüfung erlangen. Details finden Sie auf der Webseite der Veranstaltung.

Ihre *handschriftlichen* Lösungen für diese Hausübung geben Sie spätestens in der Übung am 19.05.2011 ab. Jeder Student muss eine eigene Lösung abgeben.

Heften Sie Ihre Blätter *oben links* zusammen und versehen Sie *alle* Blätter mit Namen und Matrikel-Nummer.

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Zu diesen gehört auch die strikte Verfolgung von Plagiarismus. Mit der Abgabe einer Lösung bestätigen Sie, dass Sie der alleinige Autor des gesamten Materials sind. Bei Unklarheiten zu diesem Thema finden Sie weiterführende Informationen unter `http://www.informatik.tu-darmstadt.de/de/sonstiges/plagiarismus/` oder sprechen Sie Ihren Betreuer an.

Aufgabe 1.1 (Abzählbarkeit) (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. (2 Punkte) $2^{A_{\mathcal{P}}}$ für $A_{\mathcal{P}}$ aus Definition 4.11 ist abzählbar.
2. (3 Punkte) Die Menge $\mathcal{F} \setminus [\![\mathcal{P}]\!]$ aller nicht-$\mathcal{P}$-berechenbaren Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ist abzählbar.
3. (6 Punkte) Die Menge $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} := \{M \in 2^{\mathbb{N}} \mid |M| \in \mathbb{N}\}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}}$:
   $$f(n) := \begin{cases} \emptyset & \text{, falls } n = 0 \\ \{\pi^2_1(n-1)\} \cup f\big(\pi^2_2(n-1)\big) & \text{, falls } n > 0 \end{cases}$$
4. (1 Punkt) Die Menge $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{cf}} := \{M \in 2^{\mathbb{N}} \mid |\mathbb{N} \setminus M| \in \mathbb{N}\}$ aller cofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Aufgabe 1.2 (Gödelisierung) (14 Punkte)

Sei $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} := \{M \in 2^{\mathbb{N}} \mid |M| \in \mathbb{N}\}$, also die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$. Sei $\gamma : 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} \mapsto \mathbb{N}$:

$$\gamma(M) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } M = \emptyset \\ \pi^2\Big(\max(M), \gamma\big(M \setminus \{\max(M)\}\big)\Big) + 1 & \text{, falls } M \neq \emptyset \end{cases}$$

Dabei ist $\max : 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die jeder nicht-leeren Menge natürlicher Zahlen ihr maximales Element zuordnet.

Ist in den folgenden Teilaufgaben ein Programm anzugeben, so können Sie die Hilfsprozeduren $\texttt{PAIR}^2$, $\texttt{PAIR}^2_1$, $\texttt{PAIR}^2_2$ nach Satz 4.3 und Satz 4.4 sowie die Prozeduren aus dem GGT-Beispiel in Abbildung 2.3 ohne Angabe einer Definition verwenden.

1. (2 Punkte) Berechnen Sie $\gamma(\{0\})$, $\gamma(\{1\})$ und $\gamma(\{2,1\})$
2. (9 Punkte) Beweisen Sie, dass γ eine Gödelisierung gemäß Definition 4.1 ist. Geben Sie dabei insbesondere eine $\mathcal{P}[1]$-Prozedur `IS_SET` mit $[\![\texttt{IS\_SET}]\!] = \gamma?$ an.
3. (3 Punkte) Geben Sie eine $\mathcal{P}[1]$-Prozedur `MIN` zur Berechnung des minimalen Elements einer kodierten Menge an. Es soll gelten:

$$[\![\texttt{MIN}]\!](\gamma(M)) = \begin{cases} \perp & \text{, falls } M = \emptyset \\ \min(M) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1.3 (rekursive Aufzählbarkeit) (7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. (2 Punkte) Falls A und B rekursiv aufzählbar sind, so ist $A \cup B$ auch rekursiv aufzählbar.
2. (1 Punkt) Falls $A \cup B$ rekursiv aufzählbar ist, so sind A und B auch rekursiv aufzählbar.
3. (2 Punkte) Falls A und B rekursiv aufzählbar sind, so ist $A \times B$ auch rekursiv aufzählbar.
4. (2 Punkte) Falls $A \times B \neq \emptyset$ rekursiv aufzählbar ist, so sind A und B auch rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 1.4 (Entscheidbarkeit) (7 Punkte)

Betrachten Sie das Problem $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n) = 8\}$.

1. (6 Punkte) Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass A nicht entscheidbar ist.
2. (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\overline{A}$ nicht entscheidbar ist.