Formale Grundlagen der Informatik 3 –

8. Terminierungsbeweise

Christoph Walther
TU Darmstadt

1 Terminierende $\mathcal{L}$-Programme und Prozeduren

Definition 1 (Terminierung von $\mathcal{L}$-Programmen und Prozeduren)

(1) Das initiale $\mathcal{L}$-Programm terminiert.[1]

(2) Ist P ein terminierendes $\mathcal{L}$-Programm und entsteht das $\mathcal{L}$-Programm P' durch Erweiterung von P durch eine Datentypdefinition, so terminiert P'.

(3) Ist P ein terminierendes $\mathcal{L}$-Programm und entsteht das $\mathcal{L}$-Programm P' durch Erweiterung von P durch eine Lemmadefinition, so terminiert P'.

(4) Ist P ein terminierendes $\mathcal{L}$-Programm und entsteht das $\mathcal{L}$-Programm P' durch Erweiterung von P durch die Definition einer Prozedur `proc`, so terminiert die Prozedur `proc` sowie das $\mathcal{L}$-Programm P' gdw. die *Rekursionsordnung*[2] $>_{R_{\mathtt{proc}'},x_1\ldots x_k}$ jeder monomorphen Instanz $\mathtt{proc}'$ von `proc` *fundiert* ist. ■

[1] Initiales $\mathcal{L}$-Programm = $\mathcal{L}$-Programm, das bei Start von *VeriFun* in *Predefined* angezeigt wird.
[2] Siehe Definition 6 in **Kapitel 7**.

Damit:

- Ein $\mathcal{L}$-Programm P *terminiert* gdw. jede $\mathcal{L}$-Prozedur von P terminiert.
- Rekursive Definition nach einer *fundierten* Relation garantiert *Terminierung*.
- Aus einer *terminierenden* Prozedur gewinnt man (uniform) eine *fundierte* Relation.

Satz 2 (Fundierte Relationenbeschreibungen und terminierenden Prozeduren)

Die Relationenbeschreibung $R_{\mathtt{p}}$ einer $\mathcal{L}$-Prozedur `p` *ist* fundiert *gdw. die $\mathcal{L}$-Prozedur* `p` terminiert.

Beweis: *$R_{\mathtt{p}}$ ist fundiert gdw. jede monomorphe Instanz $R_{\mathtt{p}'}$ von $R_{\mathtt{p}}$ fundiert ist (=> **Kapitel 6**, Definition 8) gdw. jede Relation $>_{R_{\mathtt{p}'},x_1\ldots x_k}$ fundiert ist (=> **Kapitel 6**, Definition 8) gdw. gdw.* `p` *terminiert (=> Definition 1).*

Satz 3

Für jedes terminierende $\mathcal{L}$*-Programm ist $(\mathcal{G}(P), \Rightarrow_P)$ eine fundierte Menge.*[3]

[3] Siehe. Abschnitt 2.2 in **Kapitel 5**.

***VeriFun*:**

- In *VeriFun* können nur *terminierende* $\mathcal{L}$-Programme *verifiziert* werden, also keine Beweise *partieller* sondern nur *totaler* Korrektheit **!**
- **Konsequenz:** Die *Terminierung* von Prozeduren muß *bewiesen* werden, um deren Eigenschaften beweisen zu können.

2 Automatische Terminierungsbeweise

- In ***VeriFun*** ist ein Verfahren zum automatischen Terminierungsnachweis implementiert.
- Bei Eingabe einer Prozedur `p` erzeugt das System eine Menge von *Terminierungshypothesen* $th_1, \ldots, th_n$ für `p`.
- Terminierungshypothesen haben die gleiche *Form wie Lemmata*.
- Das System versucht alle *Terminierungshypothesen* zu *verifizieren*.
- **Es gilt:** Sind alle *Terminierungshypothesen* $th_1, \ldots, th_n$ *wahr*, so *terminiert* die *Prozedur* `p`.

- **Mögliche Ergebnisse** bei Eingabe einer Prozedur `p`:
  - Die Erzeugung von Terminierungshypothesen scheitert
    (Prozedur im Zustand ignored*;* graues *Prozedur-Icon)*
    $\Rightarrow$ Benutzer muß durch Angabe von *Maßtermen* die Erzeugung geeigneter Terminierungshypothesen initiieren (s. Abschnitt 3).
  - Die Erzeugung von Terminierungshypothesen gelingt, System scheitert jedoch beim Nachweis derselben
    (Prozedur im Zustand ready*;* blaues *Prozedur-Icon)*
    $\Rightarrow$ Benutzer muß interaktiv den Beweisbaum der Terminierungshypothesen editieren (=> *HPL*-Regeln) *oder aber* durch Angabe von Maßtermen die Erzeugung alternativer Terminierungshypothesen initiieren (s. Abschnitt 3).
  - Die Erzeugung der Terminierungshypothesen sowie deren Beweis gelingt
    $\Rightarrow$ **fertig !** Terminierung von `p` bewiesen
    (Prozedur im Zustand verified*;* grünes *Prozedur-Icon)*.

- Das automatische Terminierungsbeweisverfahren ist *korrekt* aber *unvollständig*, d.h. es scheitert bei gewissen *terminierenden* Prozeduren:
  - Deshalb sind auch *interaktive* Terminierungsbeweise erforderlich.
  - Diese sind auch *prinzipiell* erforderlich, denn es ist *unmöglich* vollständige (und korrekte) automatische Terminierungsbeweisverfahren anzugeben (=> Vorlesung *Berechenbarkeit*: Nicht-berechenbare Funktionen).
- **Aber:** Das *automatische Terminierungsbeweisverfahren* ist für alle Prozeduren *erfolgreich*, deren *Rekursionsordnung* einer *strukturellen Ordnung* entsprechen (=> Definition 3 in **Kapitel 7**).
  - *Anmerkung*: Dies ist sogar *semi-entscheidbar* (=> Vorlesung *Berechenbarkeit*: Primitiv-rekursive Funktionen).
- **Beispiel:** Alle Prozeduren aus der *InsertionSort*-Fallstudie (=> **Kapitel 2**)

3 Interaktive Terminierungsbeweise

- "Meta"-Axiom in ***VeriFun***:
  (*) Prozedur $>$ (aus *Predefined*) definiert eine *fundierte Relation* auf der Menge der Konstruktorgrundterme von `nat`.
- **Sonderfall:** Wir betrachten zunächst nur Prozeduren `p` mit *genau einem formalen Parameter* `x` von Typ `nat` und *genau einem rekursiven Aufruf*.
- Sei $A = \langle H, \{\{x/t\}\}\rangle$ die atomare rekursive Relationenbeschreibung von `p`.
- Aus A bilden wir die *Terminierungshypothese*

$$th_A = \forall\, \texttt{x:nat}\ \texttt{if}\{\text{AND}(H), \texttt{x} > \texttt{t}, \texttt{true}\}$$

  wobei AND($\{b_1, \ldots, b_n\}$) = Konjunktion der b_i ausgedrückt mittels `if`-Termen.

Satz 4

Kann die Terminierungshypothese th_A verifiziert werden, so terminiert `p`.

Beweis:

- Angenommen, `p` terminiert nicht.
- Dann gibt es eine unendliche Folge $q_0, q_1, q_2, \ldots$ von Konstruktorgrundtermen vom Typ `nat`, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:
  Bei Berechnung von `p(`q_i`)` wird `p(`q_{i+1}`)` rekursiv aufgerufen.
- Damit gilt $eval_P(\text{AND}(H\,[\texttt{x}/q_i])) = \texttt{true}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, denn die Bedingung AND($H\,[\texttt{x}/q_i]$), die zum jeweils nächsten rekursiven Aufruf führt, muß ja gelten.
- Damit gilt $eval_P(q_i > t\,[\texttt{x}/q_i]) = \texttt{true}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, denn th_A ist nach Voraussetzung verifiziert.
- Folglich gilt $q_i > eval_P(t\,[\texttt{x}/q_i])$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Für $r_0 := q_0$ und $r_{i+1} := eval_P(t\,[\texttt{x}/r_i])$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $r_0, r_1, r_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Konstruktorgrundtermen vom Typ `nat` mit $r_i > r_{i+1}$.
- Damit ist $>$ im Widerspruch zu (*) nicht fundiert.
- Folglich war die Annahme falsch, d.h. `p` terminiert. ■

Beispiel 1

Für

```
function half(x:nat):nat <=
if ?0(x)
 then 0
 else if ?0(⁻(x)) then 0 else ⁺(half(⁻(⁻(x)))) end_if
end_if
```

erhält man die rekursive atomare Relationenbeschreibung

$$A = \left\langle \left\{ \neg ?0(x), \neg ?0(^-(x)) \right\}, \left\{ \left\{ x/^-(^-(x)) \right\} \right\} \right\rangle$$

und damit die (trivial zu verifizierende) Terminierungshypothese[4,5]

$$th_A = \forall\, \mathtt{x{:}nat}\ \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{x}),\ \mathtt{if}\{\neg ?0(^-(\mathtt{x})),\ \mathtt{x} > {}^-(^-(\mathtt{x})), \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}\,. \tag{1}$$

[4] Nach Definition müßten wir eigentlich $\forall$ `x:nat if{if{¬?0(x), ¬?0(⁻(x)), false}, x > ⁻(⁻(x)), true}` schreiben. Wir verwenden jedoch in den Beispielen die *normalisierte* Form (1) (d.h. $a \to (b \to c)$ anstatt $a \wedge b \to c$), die auch in *VeriFun* angezeigt wird.

[5] Eine Terminierungshypothese für die Prozedur `half` wird in *VeriFun* automatisch erzeugt (und bewiesen).

- **Verallgemeinerung 1:** Prozedur `p` enthält *mehrere* rekursive Aufrufe
- *Dann*:
  - Bilde für *jede* atomare rekursive Relationenbeschreibung
    $$A = \langle H, \{\{x/t_1\}, \ldots, \{x/t_j\}\}\rangle$$
    die Terminierungshypothesen
    $$th_{A,i} = \forall\, \mathtt{x{:}nat}\ \mathtt{if}\{\mathrm{AND}(H), \mathtt{x} > \mathtt{t}_i, \mathtt{true}\}\,.$$
  - Verifiziere alle Terminierungshypothesen $th_{A,1}, \ldots, th_{A,j}$.

Beispiel 2

Für die Prozedur zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen

```
function fib(x:nat):nat <=
if ?0(x)
 then 0
 else if ?0(⁻(x)) then 1 else fib(⁻(x))+fib(⁻(⁻(x))) end_if
end_if
```

erhält man die rekursive atomare Relationenbeschreibung

$$A = \left\langle \left\{ \neg ?0(x), \neg ?0(^-(x)) \right\}, \left\{ \left\{ x/^-(x) \right\}, \left\{ x/^-(^-(x)) \right\} \right\} \right\rangle$$

und damit die (trivial zu verifizierenden) Terminierungshypothesen[6]

$$th_{A,1} = \forall\, \mathtt{x{:}nat}\ \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{x}),\ \mathtt{if}\{\neg ?0(^-(\mathtt{x})),\ \mathtt{x} > {}^-(\mathtt{x}), \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}$$

sowie

$$th_{A,2} = \forall\, \mathtt{x{:}nat}\ \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{x}),\ \mathtt{if}\{\neg ?0(^-(\mathtt{x})),\ \mathtt{x} > {}^-(^-(\mathtt{x})), \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}\,.$$

[6] Terminierungshypothesen für die Prozedur `fib` werden in *VeriFun* automatisch erzeugt (und bewiesen).

- **Verallgemeinerung 2:**
  Der formale Parameter `x` der Prozedur `p` ist vom Typ $\tau \neq \mathtt{nat}$
- *Dann*:
  - Definiere eine *Terminierungsfunktion* $m : \tau \to \mathtt{nat}$ durch Angabe eines *Maßterms* `m` vom Typ `nat`, der `x` als einzige Variable enthält.
  - Bilde für *jede* atomare rekursive Relationenbeschreibung
    $$A = \langle H, \{\{x/t\}\}\rangle$$
    die Terminierungshypothese
    $$th_A = \forall\, \mathtt{x{:}}\tau\ \mathtt{if}\{\mathrm{AND}(H), \mathtt{m} > \mathtt{m}\,[\mathtt{x/t}]\,, \mathtt{true}\}\,.$$
  - Verifiziere die Terminierungshypothese th_A.

Beispiel 3

Für die Prozedur

```
function minsort(k:list[nat]):list[nat] <=
if ?ø(k)
 then ø
 else minimum(k) :: minsort(k \ minimum(k))
end_if
```

definieren wir eine Prozedur (zur Berechnung der Länge einer polymorphen Liste)

```
function [outfix] |(l:list[@T]):nat <=
if ?ø(l) then 0 else +(| tl(l) |) end_if
```

Für `minsort` *erhält man die rekursive atomare Relationenbeschreibung*

$$A = \langle \{\neg ?\text{ø}(k)\}, \{\{k/k \backslash minimum(k)\}\}\rangle$$

Als Maßterm wählen wir `| k |` *und erhalten die Terminierungshypothese*

$th_A = \forall$ `k:list[nat] if{¬?ø(k), | k | > | k \ minimum(k) |, true}` .

Bemerkung 1

(1) In Beispiel 3 wird die *Terminierung* von $|\cdots|$ *vorausgesetzt*; dies ist erlaubt, denn der *Terminierungsnachweis* von $|\cdots|$ gelingt *automatisch* (wg. struktureller Rekursion).

(2) Beim *automatische Terminierungsnachweis* von `minsort` erzeugt *VeriFun* eine wahre Terminierungshypothese, scheitert jedoch bei deren Beweis; *Grund:* Es fehlt ein Lemma zur Vervollständigung des Beweises (=> Übung).

(3) Genaugenommen haben wir schon in den Beispielen 1 und 2 Maßterme verwendet (=> *Überlegen*: Wie lauten die Maßterme dort?).

- **Verallgemeinerung 3a:** Die Prozedur `p` besitzt $n \geq 1$ formale Parameter $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_n$
- *Dann*:
  - Definiere eine *Terminierungsfunktion* $m : \tau_1 \times \ldots \times \tau_n \rightarrow$ `nat` durch Angabe eines *Maßterms* `m` vom Typ `nat`, der nur $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ als Variable enthält.
  - Bilde für *jede* atomare rekursive Relationenbeschreibung

    $$A = \langle H, \{\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}\}\rangle$$

    die Terminierungshypothese $th_A =$

    $\forall\, \mathtt{x}_1{:}\tau_1, \ldots, \mathtt{x}_n{:}\tau_n$ `if{`AND(H)`, m` $>$ `m`$[\mathtt{x}_1/\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{x}_n/\mathtt{t}_n]$ `, true}`.
  - Verifiziere jede Terminierungshypothese th_A.

Beispiel 4

Für die Prozedur

```
function gcd(x:nat, y:nat):nat <=
if ?0(x)
 then y
 else if ?0(y)
        then x
        else if x > y then gcd(x - y, y) else gcd(x, y - x) end_if
      end_if
end_if
```

erhält man die rekursiven atomare Relationenbeschreibungen

$$A_1 = \langle \{\neg ?0(x), \neg ?0(y), x > y\}, \{\{x/x - y, y/y\}\}\rangle$$

sowie

$$A_2 = \langle \{\neg ?0(x), \neg ?0(y), \neg x > y\}, \{\{x/x, y/y - x\}\}\rangle \ .$$

Als Maßterm wählen wir $\mathtt{x} + \mathtt{y}$ *und erhalten die Terminierungshypothesen*

$th_{A_1} = \forall \mathtt{x}, \mathtt{y}\mathtt{:nat}$

$\mathtt{if}\{\neg\mathtt{?0(x)}, \mathtt{if}\{\neg\mathtt{?0(y))}, \mathtt{if}\{\mathtt{x} > \mathtt{y},\ \mathtt{x} + \mathtt{y} > \mathtt{(x\ -\ y)} + \mathtt{y},\ \mathtt{true}\}, \ldots\}$

sowie $th_{A_2} = \forall \mathtt{x}, \mathtt{y}\mathtt{:nat}$

$\mathtt{if}\{\neg\mathtt{?0(x)}, \mathtt{if}\{\neg\mathtt{?0(y))}, \mathtt{if}\{\neg\mathtt{x} > \mathtt{y},\ \mathtt{x} + \mathtt{y} > \mathtt{x} + \mathtt{(y\ -\ x)}, \mathtt{true}\}, \ldots\}.$

Bemerkung 2

(1) In Beispiel 4 wird die *Terminierung* der Prozedur + *vorausgesetzt*; dies ist erlaubt, denn der *Terminierungsnachweis* von + gelingt *automatisch* (wg. struktureller Rekursion).

(2) Der *Terminierungsnachweis* von gcd gelingt ebenfalls *automatisch* (=> ausprobieren !); interaktiv hier nur zur Illustration.

(3) Ein Maßterm enthält *mindestens einen* und *höchstens alle* formalen Parameter einer Prozedur; jedoch *müssen nicht alle* formalen Parameter im Maßterm vorkommen. (=> *Überlegen*: Kann die Terminierung von gcd mittels eines Maßterms gezeigt werden, in dem *nur* x vorkommt ?)

Beispiel 5 *(Nicht alle formalen Parameter im Maßterm)*

Für die Prozedur

```
function find.max.up(a:list[nat], i:nat, x:nat):nat <=
if | a | > i
 then let a.i := (a !! i) in
        if a.i > x
         then find.max.up(a, +(i), a.i)
         else find.max.up(a, +(i), x)
        end_if
      end_let
 else x
end_if
```

erhält man die rekursiven atomare Relationenbeschreibungen

$$A_1 = \left\langle \left\{ |a| > i, (a \mathbin{!!} i) > x \right\}, \left\{ \left\{ a/a, i/{}^{+}(i), x/(a \mathbin{!!} i) \right\} \right\} \right\rangle$$

sowie

$$A_2 = \left\langle \left\{ |a| > i, \neg(a \mathbin{!!} i) > x \right\}, \left\{ \left\{ a/a, i/{}^{+}(i), x/x \right\} \right\} \right\rangle .$$

Als Maßterm wählen wir $|\,\mathtt{a}\,| - \mathtt{i}$ *(und ignorieren damit den formalen Parameter* x*). Damit erhält man die Terminierungshypothesen*

$th_{A_1} = \forall \mathtt{a}\mathtt{:list[nat]}, \mathtt{i}\mathtt{:nat}, \mathtt{x}\mathtt{:nat}$

$\mathtt{if}\{|\mathtt{a}| > \mathtt{i}, \mathtt{if}\{\mathtt{(a}\mathbin{!!}\mathtt{i)} > \mathtt{x}, |\mathtt{a}| - \mathtt{i} > |\mathtt{a}| - {}^{+}\mathtt{(i)}, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}$

sowie $th_{A_2} = \forall \mathtt{a}\mathtt{:list[nat]}, \mathtt{i}\mathtt{:nat}, \mathtt{x}\mathtt{:nat}$

$\mathtt{if}\{|\mathtt{a}| > \mathtt{i}, \mathtt{if}\{\neg\mathtt{(a}\mathbin{!!}\mathtt{i)} > \mathtt{x}, |\mathtt{a}| - \mathtt{i} > |\mathtt{a}| - {}^{+}\mathtt{(i)}, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}\,.$

Bemerkung 3

(1) In Beispiel 5 wird die *Terminierung* von $|\cdots|$ *vorausgesetzt*; dies ist erlaubt, denn der *Terminierungsnachweis* von $|\cdots|$ gelingt *automatisch* (wg. struktureller Rekursion).

(2) Der *automatische Terminierungsnachweis* von find.max.up scheitert bei Erzeugung gültiger Terminierungshypothesen, d.h. alle erzeugten Terminierungshypothesen sind *falsch* (und somit *nicht beweisbar*).

- **Verallgemeinerung 3b:** Die Prozedur p besitzt $n \geq 1$ formale Parameter $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_n$
- *Dann*:
  - Definiere *Terminierungsfunktionen* $m_1, \ldots, m_j : \tau_1 \times \ldots \times \tau_n \to \mathtt{nat}$ durch Angabe einer *Liste von Maßtermen* $\mathtt{m}_1, \ldots, \mathtt{m}_j$ jeweils vom Typ nat, die nur $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ als Variable enthalten.
  - Bilde für *jede* atomare rekursive Relationenbeschreibung

    $$A = \langle H, \{\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}\}\rangle$$

    eine Terminierungshypothese entsprechend der *links-lexikographischen Kombination* der Maßterme. Für $j = 2$ erhält man z.B. $th_A =$

    $$\begin{aligned}\forall\, \mathtt{x}_1\mathtt{:}\tau_1, \ldots, \mathtt{x}_n\mathtt{:}\tau_n\ \mathtt{if}\{&\mathrm{AND}(H),\\ &\mathtt{if}\{\mathtt{m}_1 > \mathtt{m}_1[\mathtt{x}_1/\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{x}_n/\mathtt{t}_n],\\ &\quad \mathtt{true},\\ &\quad \mathtt{if}\{\mathtt{m}_1 = \mathtt{m}_1[\mathtt{x}_1/\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{x}_n/\mathtt{t}_n],\\ &\qquad \mathtt{m}_2 > \mathtt{m}_2[\mathtt{x}_1/\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{x}_n/\mathtt{t}_n],\\ &\qquad \mathtt{false}\}\},\\ &\mathtt{true}\}\,.\end{aligned}$$

  - Verifiziere jede Terminierungshypothese th_A.

Beispiel 6 *(Lexikographische Kombination von Maßtermen)*

Für die Prozedur `gcd` *wählen wir* `x, y` *als Maßtermliste und erhalten damit die Terminierungshypothesen*

$th_{A_1} =$

```
∀ x, y:nat if{¬?0(x),
              if{¬?0(y)),
                 if{x > y,
                    if{x > x - y, true, if{x = x - y, y > y, false}},
                    true},
                 true},
              true}
```

sowie $th_{A_2} =$

```
 ∀ x, y:nat if{¬?0(x),
               if{¬?0(y)),
                  if{¬ x > y,
                     if{x > x, true, if{x = x, y > y - x, false}},
                     true},
                  true},
               true} .
```


Beispiel 7 *(Lexikographische Kombination von Maßtermen)*

Für die Prozedur

```
function flatten(x:sexpr[@ITEM]):sexpr[@ITEM] <=
case x of
 cons : case car(x) of
         cons : flatten(cons(car(car(x)),
                             cons(cdr(car(x)), cdr(x)))),
        other : cons(car(x), flatten(cdr(x)))
        end_case,
 other : x
end_case
```

(zur Linearisierung eines Binärbaums) erhält man die rekursiven atomaren Relationenbeschreibungen

$$A_1 = \langle \{?cons(x), ?cons(car(x))\}, \{\{x/cons(car(car(x)), cons(cdr(car(x)), cdr(x)))\}\}\rangle$$

sowie

$$A_2 = \langle \{?cons(x), \neg?cons(car(x))\}, \{\{x/cdr(x)\}\}\rangle \ .$$

Als Maßtermliste wählen wir `#nodes(x), #nodes(car(x))` *(=> **Kapitel 5**, Abschnitt 1.3.1) und erhalten damit die Terminierungshypothesen*

$th_{A_1} =$

```
∀ x:sexpr if{?cons(x),
             if{¬?cons(car(x)),
                if{#nodes(x) > #nodes(cdr(x)),
                   true,
                   if{#nodes(x) = #nodes(cdr(x)),
                      #nodes(car(x)) > #nodes(car(cdr(x))),
                      false}},
                true},
             true}
```

sowie

$th_{A_2} =$

```
∀ x:sexpr if{?cons(x),
             if{¬?cons(car(x)),
                if{#nodes(x) > #nodes(cdr(x)),
                   true,
                   if{#nodes(x) = #nodes(cdr(x)),
                      #nodes(car(x)) > #nodes(car(cdr(x))),
                      false}},
                true},
             true} .
```

Bemerkung 4

(1) In Beispiel 7 wird die *Terminierung* der Prozedur `#nodes` (=> **Kapitel 5**, Abschnitt 1.3.1) *vorausgesetzt*; dies ist erlaubt, denn der *Terminierungsnachweis* von `#nodes` gelingt *automatisch* (wg. struktureller Rekursion).

(2) Der *automatische Terminierungsnachweis* von `flatten` scheitert, da ***VeriFun*** keine Terminierungshypothesen erzeugen kann.

Mehrere Terminierungsbeweise (für *eine* Prozedur)

- Eine Prozedur p kann bezüglich *mehrerer* (unterschiedlicher) fundierten Relationen $\Re_1, \ldots, \Re_h$ terminieren.
- *Die Terminierung von* p *ist gezeigt, sobald* **alle** *Terminierungshypothesen, die mittels* **eines** *Maßterms (***einer** *Maßtermliste) erzeugt wurden, bewiesen worden sind* **!**
- **Aber:**
  - Für jeden Terminierungsnachweis bzgl. ***eines*** *Maßterms* (***einer*** *Maßtermliste*) erhält man ***eine*** *fundierte Relationenbeschreibung*.
  - Aus *fundierten* Relationenbeschreibungen werden (*gültige*) Induktionsaxiome erzeugt (=> **Kapitel 6**, Abschnitt 2.3).
  - *Damit:* Für jeden Terminierungsnachweis bzgl. ***eines*** *Maßterms* (***einer*** *Maßtermliste*) erhält man ***ein*** *Induktionsaxiom*.
  - *Konsequenz:* Es ist vorteilhaft – falls möglich – mehrere Terminierungsbeweise für eine Prozedur zu führen, da so mehrere (unterschiedliche) Induktionsaxiome für nachfolgende Beweisaufgaben zur Verfügung stehen.

Beispiel 8

Für die Prozedur

```
function ntl(n : ℕ, k : list[@ITEM]) : list[@ITEM] <=
if ?ø(k)
 then k
 else if ?0(n)
        then k
        else ntl(⁻(n), tl(k))
       end_if
end_if
```

erhält man die rekursive atomare Relationenbeschreibung

$$A = \langle \{\neg ?\text{ø}(\mathtt{k}), \neg ?0(n)\}, \{\{n/{}^{-}(n), k/tl(k)\}\}\rangle \ .$$

Als Maßterme wählen wir (1.) k *und* (2.) | k | *und erhalten damit die Terminierungshypothesen* $th_{A,1} = \forall$ k:list[@ITEM], n:nat

$$\mathtt{if}\{\neg ?\text{ø}(\mathtt{k}), \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{n}), \ \mathtt{n} > {}^{-}(\mathtt{n}), \ \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}$$

sowie $th_{A,2} = \forall$ k:list[@ITEM], n:nat

$$\mathtt{if}\{\neg ?\text{ø}(\mathtt{k}), \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{n}), \ | \mathtt{k} | > | \mathtt{tl}(\mathtt{k}) |, \ \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\} \ .$$

- Bei Beweis von $th_{A,1}$ wird die Bedingung "¬?ø(k)" nicht verwendet. Damit erhält man die *optimierte Relationenbeschreibung* (=> **Kapitel 7**, Abschnitt 3)

$$R^{(1)}_{\mathtt{ntl}} := \left\{ \begin{array}{l} \langle \{?0(n)\}, \emptyset \rangle, \\ \langle \{\neg ?0(n)\}, \{\{n/\mathtt{pred}(n)\}\} \rangle \end{array} \right\} .$$

- Bei Beweis von $th_{A,2}$ wird die Bedingung "¬?0(n)" nicht verwendet. Damit erhält man die *optimierte Relationenbeschreibung* (=> **Kapitel 7**, Abschnitt 3)

$$R^{(2)}_{\mathtt{ntl}} := \left\{ \begin{array}{l} \langle \{?\text{ø}(k)\}, \emptyset \rangle, \\ \langle \{\neg ?\text{ø}(k)\}, \{\{k/\mathtt{tl}(k)\}\} \rangle \end{array} \right\} .$$

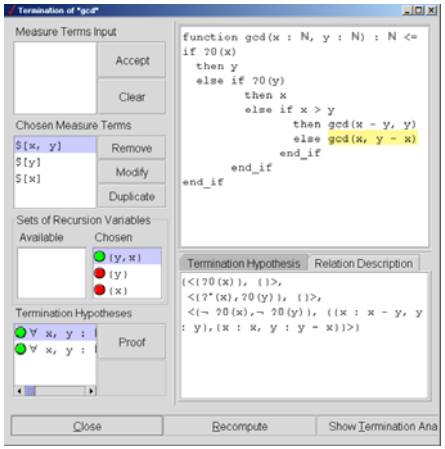
Bemerkung 5

(1) Anstatt Maßterme können auch Listen von Maßtermen der Reihe nach angegeben werden.

(2) Beide *Terminierungsnachweise* von ntl gelingen *automatisch* (=> ausprobieren !); interaktiv hier nur zur Illustration.

4 Benutzerinteraktion bei Terminierungsbeweisen

- Interaktive Terminierungsbeweise werden in ***VeriFun*** über das *Termination Window* analysiert und gesteuert
- **Aufruf:**
  1. Selektiere Prozedur-Icon im *Programm Window*
  2. Öffnen des *Termination Window* über
     - Maus Doppelklick = Menue *Program**Set Termination* (falls Prozedur noch nicht in Beweisen verwendet wurde) oder
     - *Termination Details* unter dem Reiter *Termination* im *Program Viewer*

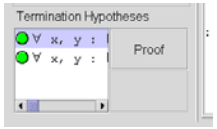


- Versuch automatischer Terminierungsbeweis mit Maßterm x
  – gescheitert, da (eine) Terminierungshypothese widerlegt werden kann
- Versuch automatischer Terminierungsbeweis mit Maßterm y
  – gescheitert, da (eine) Terminierungshypothese widerlegt werden kann
- Versuch automatischer Terminierungsbeweis mit Maßterm x + y
  – erfolgreich, da beide Terminierungshypothese bewiesen werden können

Interaktiver Terminierungsbeweis

- Nach Eingabe eines Maßterms (oder einer Liste von Maßtermen) *Accept* "drücken"

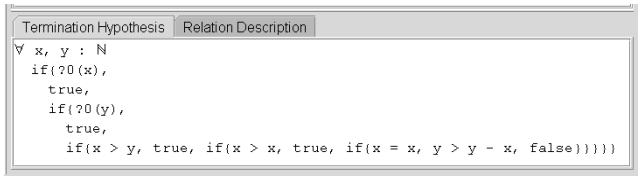
- Mit Maus Terminierungshypothese selektieren und dann *Doppelklick* oder *Proof* "drücken" um deren Beweisbaum im *Proof Window* anzuzeigen.
  – *Grünes* Icon = Status *verified* = Terminierungshypothese ist *bewiesen*.
  – *Blaues* Icon = Status *ready* = Terminierungshypothese *nicht bewiesen* (=> Beweisbaum mittels *HPL*-Regeln editieren).
  – *Rotes* Icon = Status *disproved* = Terminierungshypothese ist *widerlegt* (=> anderen Maßterm verwenden)



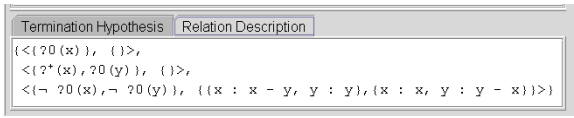
- Der *rekursive Aufruf*, für den die *selektierte Terminierungshypothese* erzeugt wurde, wird *gelb unterlegt* angezeigt

```
function gcd(x : N, y : N) : N <=
if ?0(x)
  then y
  else if ?0(y)
         then x
         else if x > y
                then gcd(x - y, y)
                else gcd(x, y - x)
              end_if
       end_if
end_if
```

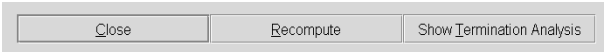
- Der *PrettyPrint* der selektierten Terminierungshypothese wird unter dem Reiter *Termination Hypothesis* angezeigt



- Konnten *alle Terminierungshypothesen* (zu einem Maßterm oder einer Liste von Maßtermen) *bewiesen* werden, so wird für die Prozedur eine *optimierte Relationenbeschreibung* erzeugt und unter dem Reiter *Relation Description* angezeigt



- Mit
  – *Close* wird das *Termination Window* geschlossen
  – *Recompute* wird eine *automatische Terminierungsanalyse* gestartet
  – *Show Termination Analysis* werden *Details* der *automatischen Terminierungsanalyse* angezeigt



Bemerkung 6

- **System-Bug**: Bei Selektion einer Terminierungshypothese im *Termination Window* kann es zu *Fehlermeldungen* im *System Log* kommen – in diesem Fall einfach *Termination Window* über *Close* schließen und anschließend erneut öffnen.
- **Behauptung**: "Falls alle Terminierungshypothesen, die zu einem Maßterm erzeugt wurden, widerlegt sind, so terminiert die Prozedur nicht."
  Überlegen: Stimmt das (=> Beweis) oder stimmt das nicht (=> Gegenbeispiel).