Formale Grundlagen der Informatik 3 –

4. Beweise, Kalküle, Herleitungen

Christoph Walther
TU Darmstadt

1 Beweiskalküle

- Grundlagenkrise der Mathematik ab 1900
- **Frage:** Wie vertrauenswürdig sind mathematische Methoden, wenn man sowohl eine Behauptung als auch deren Negat nachweisen kann ?
- **Frage:** Wie vertrauenswürdig sind Behauptungen über mathematische Sachverhalte, wenn die Methoden, mit denen diese nachgewiesen wurden, informell und nicht allgemein anerkannt sind ?
- **Beispiel Antinomie:**
  - *informell:* In einem Dorf gibt es einen Barbier, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Also rasiert sich der Barbier selbst, genau dann wenn er sich nicht selbst rasiert **!**
  - *formal:* Wenn $M := \{N | N \notin N\}$, dann $M \in M$ gdw. $M \notin M$ (denn falls $M \in M$, so auch $M \notin M$, und falls $M \notin M$, dann $M \in M$).
- **Beispiel Induktion:** "*Wenn $P(0)$ gezeigt ist, und $P(n) \rightarrow P(n+1)$ für jedes $n \in N$ gezeigt ist, so hat man auch $P(n)$ für jedes $n \in N$ gezeigt*".
  Warum ist das überhaupt eine gültige Schlußweise? Warum darf man zum Nachweis von $P(n+1)$ annehmen, daß $P(n)$ wahr ist ?

Lösung für diese Probleme:

- (Formale) *Logik* (= Meta-Mathematik = Mathematik über Mathematik) durch

(1) ***Normierung formaler Sprachen***, in der mathematische Sachverhalte ***repräsentiert*** werden
  - **Beispiel:** Sprache des Sequenzenkalküls (=> FGdI 2)
  - **Beispiel:** Klauselsprache des Resolutionskalküls (=> FGdI 2)
  - **Konsequenz der Normierung** (beispielsweise): Definitionen wie "$\{N | N \notin N\}$" sind verboten

(2) ***Normierung*** mathematischer ***Schlußweisen*** durch ***Beweiskalküle***: Mathematische Schlüsse werden durch *Regeln* beschrieben, die *Ausdrücke* einer Sprache in (andere) Ausdrücke dieser *Sprache* transformieren
  - **Reine Symbolmanipulation:** Worte (über einem Alphabet Σ) werden in andere Worte transformiert, nichts weiter **!**
  - **Absicht:** Nachweis von (wahren) mathematischen Behauptungen durch reine Symbolmanipulation
  - **Damit beispielsweise:** Einfache Prüfung, ob Schlußweisen, die zum Nachweis einer Behauptung führen sollen, tatsächlich korrekt sind – dazu muß man kein Mathematiker sein, sondern nur die Beweisregeln kennen

  - **Analogie:** Man muß kein Schachspieler sein, um zu überprüfen, ob die Zugfolgen in einer Schachpartie legal waren – man muß lediglich die Schachregeln kennen
  - **Beispiel:** Regeln des Sequenzenkalküls (=> FGdI 2)
  - **Beispiel:** Regeln des Resolutionskalküls (=> FGdI 2)

(3) ***Herleitungen***: *Formalisierung* des Begriffs "*Beweis*"
  - **Definition von:** Was genau ist "*formaler Beweis*" in einem Kalkül?
  - **Beispiel:** Eine *Herleitung* aus einer Sequenz s im *Sequenzenkalkül* ist ein *Baum*, dessen Wurzel mit s und dessen Knoten mit Sequenzen markiert sind, die durch Anwendung der *Sequenzenregeln* entstehen;
    ein *formaler Beweis* der *Allgemeingültigkeit einer Sequenz* s ist eine Herleitung aus s, deren *Blätter mit Axiomen* markiert sind (=> FGdI 2)
  - **Beispiel:** Eine *Herleitung aus einer Klauselmenge* S im *Resolutionskalkül* ist ein *Baum*, dessen Knoten mit Klauseln markiert sind, die aus S stammen oder die durch Anwendung der Resolutions- und Faktorisierungsregel (auf Klauseln im Baum) entstehen ;
    ein *formaler Beweis der Unerfüllbarkeit von* S ist eine Herleitung aus S, deren *Wurzel* mit der *leeren Klausel* markiert ist (=> FGdI 2)

Zusammenfassung: Ein *Kalkül* K ist *definiert* durch *Angabe*

(1) einer *formalen Sprache* L

(2) den *Regeln* R von K

(3) den mittels R gebildeten *Herleitungen* in K

- ***Jetzt weiter:*** Um *informelles Argumentieren* durch *Herleitungen* eines Kalküls *zu ersetzen*, muß für die Sprache des Kalküls eine **Semantik** (= Bedeutung) definiert werden
  - Mit Definition der *Semantik* wird formal präzise festgelegt, was *Ausdrücke der Sprache bedeuten*
  - **Beispiel:** *Wahrheitstafeln* und $\mathcal{V}$*-Interpretationen* bzw. $\mathcal{V}$*-Belegungen* zur Deutung von Ausdrücken der Sprache der *Aussagenlogik* (=> FGdI 2)
  - **Beispiel:** *S-Strukturen* und *S-Interpretationen* zur Deutung von Ausdrücken der Sprache der *Prädikatenlogik* (=> FGdI 2)
  - **Offensichtliche Forderung:** Die *Kalkülregeln* müssen die *Sprachsemantik* "*respektieren*" (=> nur Schlüsse, die bzgl. der Semantik gültig sind)
  - **Ergebnis:** Mit Kalkülen *Formalisierung* (= "Mathematisierung") *informeller* mathematischer Schlußweisen

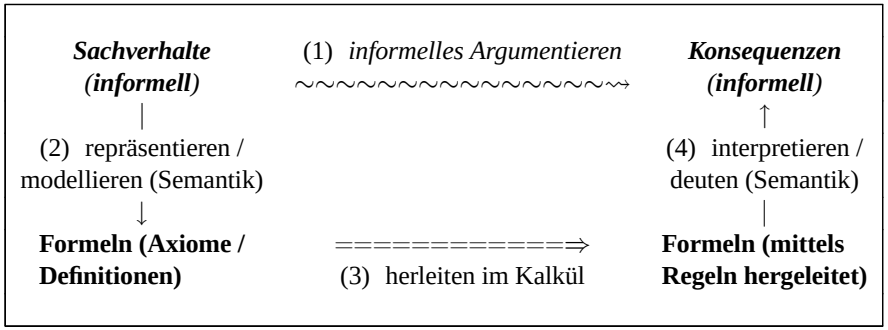
Also Vorgehen:

(1) Anstatt ausgehend von informell gegebenen Sachverhalten durch *informelles Argumentieren* informelle Konsequenzen zu postulieren

(2) werden (ausgehend von der Sprachsemantik) die Sachverhalte *durch Formeln modelliert / repräsentiert* (=> **Kapitel 3:** *Validierungsproblem !*)

(3) daraus weitere *Formeln mittels der Kalkülregeln hergeleitet*, und diese dann

(4) (ausgehend von der Sprachsemantik) in der *informellen "Welt" gedeutet / interpretiert* (=> **Kapitel 3:** *Validierungsproblem !*)



Nutzen: Jetzt kann bei (3) mathematisch präzise untersucht werden

- Was ist prinzipiell (nicht) beweisbar ?
- Was ist (nicht) automatisch beweisbar ?
- Ist jede bewiesene Behauptung auch wahr (Korrektheit) ?
- Kann jede wahre Behauptung auch bewiesen werden (Vollständigkeit) ?
- Ist entscheidbar, ob eine Behauptung beweisbar ist ?
- ...

Beispiele und Resultate

Aussagenlogik

(1) *Sprache*: Formeln werden ausgehend von Aussagenvariablen mittels der üblichen logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ gebildet

(2) *Regeln*: Beispielsweise aussagenlogischer Sequenzenkalkül (=> FGdI 2)

(3) *Herleitungen*: mit Formeln markierte Bäume (=> FGdI 2)

- *Semantik*: Durch Belegung für Aussagenvariablen sowie Festlegung der Bedeutung der logischen Verknüpfungen (z.B. durch Wahrheitstafeln)
- *Resultate*:
  (a) es gibt *korrekte* und *vollständige* Kalküle für die Aussagenlogik (=> FGdI 2);
  (b) Wenn eine Formel *eine Tautologie* ist, so kann man das maschinell feststellen (=> Menge der Tautologien ist *rekursiv aufzählbar*);
  (c) Wenn eine Formel *keine Tautologie* ist, so kann man das maschinell feststellen (=> Komplement der Menge der Tautologien ist *rekursiv aufzählbar*):
  (d) Konsequenz aus (b) und (c): Menge der Tautologien ist *entscheidbar*.

Prädikatenlogik 1. Stufe (PL 1)

(1) *Sprache*: Formeln werden ausgehend von Variablen-, Funktions- und Prädikatssymbolen mittels der üblichen logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ sowie der Quantoren $\forall$ und $\exists$ gebildet

(2) *Regeln*: Beispielsweise Sequenzenkalkül (=> FGdI 2)

(3) *Herleitungen*: mit Formeln markierte Bäume (=> FGdI 2)

- *Semantik*: Formeln werden mittels *Interpretationen* gedeutet; eine Formel ist *allgemeingültig* gdw. sie in *jeder Interpretation* wahr ist (=> FGdI 2)
- *Resultate*:
  (a) es gibt *korrekte* und *vollständige* Kalküle für PL 1 (=> FGdI 2) [1]
  (b) man kann maschinell feststellen, ob eine Formel *allgemeingültig* ist (=> Menge der allgemeingültigen Formeln ist *rekursiv aufzählbar*)
  (c) man kann *nicht* maschinell feststellen, ob eine Formel *nicht allgemeingültig* ist (=> Menge der allgemeing. Formeln *nicht rekursiv aufzählbar*)
  (d) Konsequenz aus (b) und (c): Menge der *allgemeingültigen Formeln* ist *nicht entscheidbar* [2]

[1] Kurt Gödel: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, Dissertation, 1929.
[2] Alonzo Church: A note on the Entscheidungsproblem, Journal of Symbolic Logic, 1936.
Alan Turing: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, Proceedings

Formale Arithmetik / Peano Arithmetik

(1) *Sprache*: Wie PL 1 jedoch mit einer Signatur, die mindestens Funktionssymbole für 0, Nachfolgerfunktion, Addition und Multiplikation enthält

(2) *Regeln*: Wie PL 1 sowie weitere Axiome für *Induktion, Addition, ...*

(3) *Herleitungen*: Wie PL 1

- *Semantik*: Formeln werden mittels einer festen *Standardinterpretation* gedeutet, die die Symbole für 0, Nachfolgerfunktion, Addition und Multiplikation so wie die entsprechenden Funktionen in $\mathbb{N}$ deuten; eine *Formel gilt* gdw. sie *in der Standardinterpretation* wahr ist
- *Resultate*:
  (a) es gibt *korrekte* Kalküle für die formale Arithmetik
  (b) es gibt *keine korrekten und vollständigen* Kalküle für die formale Arithmetik [3]
    * für jeden korrekten Kalkül kann man eine Formel angeben, von der gezeigt werden kann, daß diese *in der Standardinterpretation wahr* jedoch *nicht im Kalkül beweisbar* ist

of the London Mathematical Society, Second Series 42:230–265, 1936.
[3] Kurt Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931, S.173–198.

(c) *Damit:* Es kann maschinell *nicht* festgestellt werden, ob eine Formel der Arithmetik *wahr oder falsch* ist (=> weder ist die Menge der wahren Formeln der Arithmetik rekursiv aufzählbar, noch ist es deren Komplement)

(d) *Insbesondere dann:* Die Menge der wahren Formeln der Arithmetik ist *nicht entscheidbar*.

Bemerkung 1

- Die Ergebnisse für die *Formale Arithmetik* gelten sinngemäß auch für Kalküle zur Programmverifikation:
  Grund: Da Programmiersprachen *Schleifen* und/oder *Rekursion* besitzen kann die Formale Arithmetik mittels Programmen modelliert werden.
- **Konsequenz 1:** Jeder korrekte Kalkül für Programmbeweise ist unvollständig (denn es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind)
- **Konsequenz 2:** Es ist nicht entscheidbar, ob Behauptungen über ein Programm wahr sind.

Weitere Beispiele für Beweiskalküle

- Die *Symbolische Auswertung* in *VeriFun* wird durch einen Beweiskalkül für *Gleichheitsbeweise* implementiert
- Der *HPL*-Kalkül in *VeriFun* ist ein Beweiskalkül für *Induktionsbeweise*
- Der π*-Kalkül* ist ein Kalkül für Beweise über *nebenläufige Systeme*
- Der μ*-Kalkül* ist ein Kalkül für Beweise in *temporaler Logik*
- Der *Hoare-Kalkül* ist ein Kalkül für Korrektheitsbeweise über Programme *imperativer Programmiersprachen*

2 Beweise in der Mathematik

Unterscheide: *Verwendung* von Kalkülen
- um mathematische Schlußweisen *zu untersuchen* (=> *Mathematik* / *formale Logik*)
- um Beweise tatsächlich *zu führen* (=> *Informatik*)

Nachteile von *Kalkülbeweisen* (= *formalen Beweisen*) :
- Da *jeder einzelne Beweisschritt* mittels einer Kalkülregel *protokolliert* werden muß, sind Kalkülbeweise
  - aufwendig zu führen
  - umfangreich
  - unübersichtlich
  - umständlich
  - schwer lesbar
  - ...

- **Konsequenz:**
  - In Mathematikbüchern (und anderen Veröffentlichungen) findet man keine Kalkülbeweise
  - "Offensichtliche" Schlüsse werden weggelassen (= *Makroschritte*)
    - "wie man leicht sieht, gilt ..."
    - "ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß ..."
  - Intuitive Notationen
    - "..." anstatt rekursive Definition

- Ist das jetzt wieder unpräzise ???
  - *Das geschulte Auge erkennt*: Man *könnte* den Beweis auch streng formal führen, also sind die Schlüsse gültig.
  - *Allerdings*: Fehler können schon mal übersehen werden

Ein Beispiel

- Zu zeigen sei "$\sqrt{2}$ ist irrational"
- **Also:** $\forall q \in \mathbb{Q}\, q \neq \sqrt{2}$
- **Umgeformt (1):** $\forall x, y \in \mathbb{Z}\, y \neq 0 \curvearrowright x/y \neq \sqrt{2}$
- **Umgeformt (2):** $\forall x, y \in \mathbb{Z}\, y \neq 0 \curvearrowright x \neq \sqrt{2}\, y$
- **Umgeformt (3):** $\forall x, y \in \mathbb{Z}\, y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$
- **Umgeformt (4):** $\forall x, y \in \mathbb{N}\, y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$

Jetzt Beweis dafür ...

Behauptung $(*)\ \forall x, y \in \mathbb{N}\, y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$

Beweis:

(1) *Annahme*: Behauptung ist falsch, d.h. es gelte
(i) $\exists a, b \in \mathbb{N}\, b \neq 0 \wedge a^2 = 2b^2$

(2) *O.B.d.A.*: $a + b$ ist minimal, d.h. es gilt
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{N}\, x + y < a + b \wedge y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$

(3) Wegen *(i)* ist a^2 eine gerade Zahl $\neq 0$, und folglich gilt
(iii) a ist eine gerade Zahl $\neq 0$

(4) Wegen *(iii)* gilt für ein $k \in \mathbb{N}$
(iv) $a = 2k + 2 = 2(k + 1)$

(5) Mit *(i)* und *(iv)* folgt $4(k + 1)^2 = 2b^2$, also $2(k + 1)^2 = b^2$, also
(v) $2(a/2)^2 = b^2$

(6) Setze in *(ii)* $x := b$ und $y := a/2$: Dann $b^2 \neq 2(a/2)^2$ mit *(ii)* (denn $b + a/2 < a + b$) im Widerspruch zu *(v)* **!**

(7) *Konsequenz*: Annahme *(i)* ist falsch, und folglich ist $(*)$ wahr. ■

Beweisanalyse (1)

Beweis von Behauptung $(*)$ ist ein *indirekter Induktionsbeweis*

(= Induktionsbeweis, der als Widerspruchsbeweis geführt wird)

- Prinzip für ***direkten*** *Induktionsbeweis* einer Behauptung $\forall x \in \mathbb{N}\ \phi[x]$:
  - Zeige $\phi[0]$ (= Induktionsanfang)
  - Zeige $\forall x \in \mathbb{N}\ \phi[x] \curvearrowright \phi[x+1]$ (= Induktionsschritt)
  - Mit dem Induktionsaxiom gilt dann $\forall x \in \mathbb{N}\ \phi[x]$
- Prinzip für ***indirekten*** *Induktionsbeweis* einer Behauptung $\forall x \in \mathbb{N}\ \phi[x]$:
  - *Annahme*: Behauptung ist falsch.
  - Dann ist $\exists x \in \mathbb{N}\ \neg\phi[x]$ wahr
  - Damit ist $M := \{x \in \mathbb{N} | \neg\phi[x]\}$ nicht leer.
  - Zeige $0 \notin M$ (= Induktionsanfang)
  - Mit $0 \notin M$ können wir ein $a \in M$ wählen, so daß $a \neq 0$ und $a - 1 \notin M$
  - Zeige, daß aus $\neg\phi[a]$ auch $\neg\phi[a-1]$ folgt (= Induktionsschritt)
  - Dann gilt $a - 1 \in M$, also Widerspruch **!**

- Induktionsschema für direkten Induktionsbeweis von Behauptung $(*)$:
  - $\forall x, y \in \mathbb{N}\ x = 0 \wedge y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$ (= Induktionsanfang)
  - $\forall x, y \in \mathbb{N}\ x \neq 0 \wedge [x/2 \neq 0 \curvearrowright y^2 \neq 2(x/2)^2] \curvearrowright [y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2]$ (= Induktionsschritt; Beobachtung: $y + x/2 < x + y$ wenn $x \neq 0$)
  - Damit gilt auch $\forall x, y \in \mathbb{N}\ y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$
- Sehr ungewöhnliches Induktionsprinzip **!**
  Warum gilt das überhaupt ??? (Antwort => **Kapitel 6**)

Beweisanalyse (2)

Beweis von Behauptung $(*)$ enthält zahlreiche *Makroschritte* (= "Lücken")

- "O.B.d.A.: $a + b$ ist minimal" (warum darf man das annehmen ?)
- Folgerung "a^2 ist gerade Zahl $\neq 0$" (Beweis ?)
- Folgerung "a^2 ist gerade $\curvearrowright$ a ist gerade" (Beweis ?)
- Folgerung "$a/2 \neq 0$" (Beweis ?)
- Folgerung "$2(a/2)^2 = b^2$" (Beweis ?)
- ...

$\Rightarrow$ *In Kalkülbeweisen müssen diese Lücken gefüllt werden, selbst triviale Schritte wie "$4(k+1)^2 = 2b^2 \curvearrowright 2(k+1)^2 = b^2$" müssen durch Regelanwendungen protokolliert werden*

3 Warum Logik in der Informatik ?

- Die Mathematik ist ein mächtiges Werkzeug mit dem viele Gegenstandsbereiche *formal präzise modelliert und untersucht* werden können
  - "*In jeder Wissenschaft steckt soviel Wahrheit, wie Mathematik in ihr steckt.*" (Immanuel Kant)
  - "*Die Logik ist keine Lehre, sondern ein Spiegelbild der Welt.*" (Ludwig Wittgenstein)
  - Allerdings auch: "*Wenn man aber einmal mit Logik beginnt, wo ein Gedanke von selbst aus dem vorangehenden folgt, weiß man zum Schluß nie, wie das endet.*" (Robert Musil)
- Für jede Ingenieurdisziplin fundierte mathematische Grundlagen erforderlich:
  - Welche Mathematikdisziplin jeweils gut geeignet ist, hängt von dem konkreten Gegenstandsbereich ab (Bauingenieurwesen, Maschinenbau, Elektrotechnik, u.s.w.).
- Die formale Logik ist die Mathematikdisziplin, die für die Informatik gut geeignet ist, denn
  - Informatiker müssen einen Gegenstandsbereich formal erfassen, damit Aufgaben aus diesem Bereich durch einen Rechner überhaupt verarbeitet werden können.

- Damit werden formale Sprachen und deren Semantik definiert, also Begriffe, die uns schon die formale Logik bereitstellt.
- Die Verarbeitung durch einen Rechner wird durch Kalkülregeln modelliert, also ebenfalls ein Begriff, den uns schon die formale Logik bereitstellt.
- Damit kann man jetzt für eine konkrete Anwendung untersuchen:
  (i) Sind alle Berechnungen korrekt, d.h. ist eine berechnete Lösung auch wirklich die Lösung eines Problems (Korrektheit) ?
  (ii) Kann für jedes lösbare Problem auch eine Lösung berechnet werden (Vollständigkeit) ?
  (iii) Können lösbare und unlösbare Probleme durch einen Rechner immer erkannt werden (Entscheidbarkeit) ?
  (iv) ...

Also:

- *Formale Repräsentation* eines Gegenstandsbereichs durch (syntaktisch korrekte) Ausdrücke der Sprache (*Modellierung* => FOC Kanonik).
- *Semantik* der Sprache legt fest, was ein Ausdruck *im Gegenstandsbereich bedeutet*.
- *Gültige Schlüsse* im Gegenstandsbereich werden durch *Kalkülregeln* modelliert.
- **Zweck:**
  - Durch formale Modellierung werden Unklarheiten, Mehrdeutigkeiten, Widersprüchlichkeiten in der Erfassung des Gegenstandsbereichs aufgedeckt (=> FOC Kanonik).
  - Präzise nachvollziehbare Aussagen über Gegenstandsbereich (Inspektion einer Kalkülherleitung bzgl. der Aussage).
  - Kalkülherleitungen können durch Rechner durchgeführt werden, also anstatt Schlüsse im Gegenstandsbereich selbst durchzuführen überlassen wir das einem Rechner.

4 Beweise in der Informatik

Nochmal: Ein *Kalkül* K ist *definiert* durch *Angabe*

(1) einer *formalen Sprache* L
  - Das kennen wir schon aus der Informatik

(2) den *Regeln* R von K
  - Reine *Symbolmanipulation*, also auch bekannt aus der Informatik
  - Kalkülregeln = *Erzeugungsvorschrift* für *Bäume*

(3) den mittels R gebildeten *Herleitungen* in K
  - (mit Formeln markierte) *Bäume*, also auch bekannt aus der Informatik

Fazit:

- Der *Kalkülbegriff* verwendet *Konzepte der Informatik*
- (*Historisch korrekt*: Die Informatik verwendet Konzepte der formalen Logik)
- **Also**: *Formeln* und *Herleitungen* sind *Datenobjekte*, die durch *Algorithmen* bearbeitet werden können
- **Damit**: Der *Kalkülbegriff* verwendet *Konzepte*, die eine *maschinelle Verarbeitung* erlauben

Konsequenz:

- *Nachteile* von *Kalkülbeweisen* aufgehoben durch *Rechnerunterstützung*
- *Triviale Beweisschritte* (= Lücken bei Makroschritten) können *automatisch berechnet* werden
- **Damit**: absolute Fehlerfreiheit (relativ zur korrekten Implementierung des verwendeten Beweissystems)

Beispiel: Beweis von "$\forall x, y \in \mathbb{N}\ y \neq 0 \curvearrowright x^2 \neq 2y^2$" in *VeriFun*

Benötigte Prozeduren:

```
function [infixr,10] +(x : ℕ, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x) then y else ⁺(⁻(x) + y) end_if
```

berechnet Summe zweier natürlichen Zahlen

```
function 2∗(x : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x) then 0 else ⁺(⁺(2∗(⁻(x)))) end_if
```

berechnet Verdopplung einer natürlichen Zahl

```
function [postfix] ^2(x : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x) then 0 else ⁺((⁻(x))^2 + 2∗(⁻(x))) end_if
```

berechnet Quadrat einer natürlichen Zahl


```
function ½(x : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x)
 then 0
 else if ?0(⁻(x))
       then 0
       else ⁺(½(⁻(⁻(x))))
      end_if
end_if
```

berechnet nach unten gerundete Division durch 2

```
function ℜ(x : ℕ, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x) then 0 else ℜ(y, ½(x)) end_if
```

Ergebnis irrelevant; Aus $\Re$ gewinnt man das *Induktionsschema* für den Beweis der Behauptung.
Anders gesagt: Das verwendete Induktionsschema wird *indirekt* durch die Prozedur $\Re$ angegeben. (*Wie & Warum* => **Kapitel 7**)

Benötigte Lemmata:

```
lemma + is associative <= ∀ x, y, z : ℕ
 (x + y) + z = x + y + z
```

automatischer Beweis

```
lemma + is commutative <= ∀ x, y : ℕ x + y = y + x
```

automatischer Beweis

```
lemma + is left-cancelable <= ∀ x, y, z : ℕ
 if{x + y = x + z, y = z, true}
```

automatischer Beweis

```
lemma x > y → x + z > y + z <= ∀ x, y, z : ℕ
 if{x > y, x + z > y + z, true}
```

automatischer Beweis

```
lemma x + x = 2∗(x) <= ∀ x : ℕ x + x = 2∗(x)
```

automatischer Beweis


```
lemma 2∗ is injective <= ∀ x, y : ℕ
 if{2∗(x) = 2∗(y), x = y, true}
```

automatischer Beweis

```
lemma 2∗(x + y) = 2∗(x) + 2∗(y) <= ∀ x, y : ℕ
 2∗(x + y) = 2∗(x) + 2∗(y)
```

automatischer Beweis

```
lemma (2∗(x))^2 = 2∗(2∗((x)^2)) <= ∀ x : ℕ
 (2∗(x))^2 = 2∗(2∗((x)^2))
```

automatischer Beweis

```
lemma x = 2∗(½(x)) ∨ x = ⁺(2∗(½(x))) <= ∀ x : ℕ
 if{x = 2∗(½(x)), true, x = ⁺(2∗(½(x)))}
```

automatischer Beweis

```
lemma 2∗(x) ≠ ⁺(2∗(y)) <= ∀ x, y : ℕ
 ¬ 2∗(x) = ⁺(2∗(y))
```

1 Benutzerinteraktion

Zu zeigende Behauptung:

```
lemma y ≠ 0 → 2∗((y)^2) ≠ (x)^2 <= ∀ x, y : ℕ
 if{¬ ?0(y), ¬ 2∗((y)^2) = (x)^2, true}
```

6 Benutzerinteraktionen

Kalkülbeweis:

- *Keine Beweislücken* (= Makroschritte) **!**
- *Keine Fehler* (die Korrektheit von *VeriFun* vorausgesetzt)

5 Kalküle als Rechenmodelle

- **Kalkül:** lat. *calculare* = dt. *rechnen*
- Mit *Kalkülen* können allgemein *Rechenmodelle* (= Vorgehensmodelle zur algorithmischen Lösung eines Problems) definiert werden
- Unterschied zu Algorithmen (als Rechenmodelle):
  Kalkül indeterministisch, Algorithmus deterministisch
- Mit Kalkül *Abstraktion* von *Details* einer algorithmischen Lösung
- **Sonderfall** *Beweiskalküle*: Modell für die Berechnung von Beweisen

Beispiel: *Lösung des **Matchingproblems***

- **Definition**: $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ ist die Menge der *Terme* über
  - einer *Signatur* Σ für Funktionssymbole (= Angabe der Menge der verwendeten Funktionssymbole sowie deren Stelligkeit)
  - einer Variablenmenge $\mathcal{V}$
- *Spezialfall*: Menge der *Grundterme* $\mathcal{T}(\Sigma) := \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$

- **Definition**: Eine Substitution σ ist eine totale Abbildung $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ mit (*) "$\sigma(x) \neq x$ für nur endlich viele $x \in \mathcal{V}$"
  - Wegen (*) kann jede Substitution σ durch eine *endliche* Menge $\sigma_{rep} := \{(x, \sigma(x)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) | \sigma(x) \neq x\}$ *repräsentiert* werden
  - Schreibweise: $\sigma_{rep} = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ falls
    - $\sigma(x_i) = t_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$,
    - $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \Leftrightarrow \sigma(y) = y$ für alle $y \in \mathcal{V}$
  - **Konvention**:
    (i) Man schreibt σ anstatt σ_{rep} wenn der Bezug aus dem Kontext offensichtlich ist.
    (ii) SUB bezeichnet die Menge aller σ_{rep}.

- **Definition**: Für eine Substitution σ ist $\hat{\sigma}$ eine totale Abbildung $\hat{\sigma} : \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \to \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ definiert durch
  - $\hat{\sigma}(x) := \sigma(x)$ für alle $x \in \mathcal{V}$
  - $\hat{\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))$
- **Konvention**: Man schreibt σ anstatt $\hat{\sigma}$ wenn der Bezug aus dem Kontext offensichtlich ist

Das *Matchingproblem*

- **Gegeben**:
  - Term $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ (genannt *Pattern*) sowie
  - Grundterm $q \in \mathcal{T}(\Sigma)$ (genannt *Target*)
- **Gesucht**: Substitution σ mit
  - $\sigma(t) = q$
    - *Sprechweise*: σ ist ein *Matcher* von t und q
  - und $\theta(t) \neq q$ für alle Substitutionen θ mit $\theta_{rep} \subsetneq \sigma_{rep}$
    - *Sprechweise*: σ ist ein *minimaler* Matcher von t und q
- **Damit:** Ein Matcher σ repräsentiert eine *Lösung* für die *Gleichung* $t \doteq q$ in der *freien Termalgebra*

Beispiel 1 *(Matching)*

(1) Für $t = h(g(x), y)$ und $q = h(g(f(a)), h(a, f(b)))$ (mit $x, y \in \mathcal{V}$ und $f, g, h, a, b \in \Sigma$) ist $\sigma = \{x/f(a), y/h(a, f(b))\}$ ein *minimaler Matcher* von t und q, denn
- $\sigma(h(g(x), y)) = h(g(f(a)), h(a, f(b)))$ (Beweis ?) und
- $\theta(t) \neq q$ für alle Substitutionen θ mit $\theta_{rep} \subsetneq \sigma_{rep}$ (Beweis ?)

(2) Für t und q wie in (1) ist $\theta = \{x/f(a), y/h(a, f(b)), z/f(x)\}$ ein Matcher von t und q, denn $\theta(h(g(x), y)) = h(g(f(a)), h(a, f(b)))$. Wegen (1) und $\sigma_{rep} \subsetneq \theta_{rep}$ ist θ jedoch *nicht minimal*.

(3) Für $t = h(g(x), x)$ und $q = h(g(f(a)), h(a, f(b)))$ ist das Matchingproblem *unlösbar*, denn für einen Matcher σ müßte
- sowohl $\sigma(x) = f(a)$
- als auch $\sigma(x) = h(a, f(b))$

gelten (aber $f(a) \neq h(a, f(b))$ in der freien Termalgebra **!**).

Jetzt: Lösung des Matchingproblems mittels eines Kalküls ...

Definition 1 *(Matchingkalkül)*

(1) *Sprache*: Mengen $(A, \sigma) \in 2^{\mathcal{T}(\Sigma,\mathcal{V})\times\mathcal{T}(\Sigma)} \times SUB$ mit $|A| < \infty$. [4]

(2) *Regeln*:

(a) Solve: $\dfrac{A \uplus \{x \doteq r\}, \sigma}{\theta(A), \theta \cup \sigma}$, falls $x \in \mathcal{V}$ und $\theta = \{x/r\}$ [5]

(b) Decompose: $\dfrac{A \uplus \{f(t_1 \ldots t_n) \doteq f(q_1 \ldots q_n)\}, \sigma}{A \cup \{t_1 \doteq q_1, \ldots, t_n \doteq q_n\}, \sigma}$

(c) Eliminate: $\dfrac{A \uplus \{t \doteq t\}, \sigma}{A, \sigma}$

(3) *Herleitungen*:
- Für $A, A' \subseteq_{fin} \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma)$ und $\sigma, \sigma' \in SUB$ ist $\Rightarrow$ eine binäre Relation auf $2^{\mathcal{T}(\Sigma,\mathcal{V})\times\mathcal{T}(\Sigma)} \times SUB$ definiert durch "$(A, \sigma) \Rightarrow (A', \sigma')$ gdw. (A', σ') aus (A, σ) durch Anwendung einer der Kalkülregeln entsteht". [6]
- *Damit*: Ein *Matching-Problem* A ist *lösbar* und σ ist ein *Lösung* von A gdw. $(A, \varepsilon) \Rightarrow^* (\emptyset, \sigma)$. [7]

[4] 2^M = Potenzmenge von M.
[5] $A \uplus \{a\}$ steht für $A \cup \{a\}$ mit $a \notin A$. Zwecks Lesbarkeit wird $t \doteq q$ anstatt (t, q) für Paare aus $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma)$ geschrieben. $\theta(A) := \{\theta(t) \doteq q | t \doteq q \in A\}$
[6] $M \subseteq_{fin} N$ steht für $M \subseteq N$ und $|M| < \infty$.
[7] ε bezeichnet die *identische Substitution*, d.h. $\varepsilon_{rep} = \emptyset$.

Bemerkung 2 *Mit der Anwendungsbedingung "falls $f(t_1 \ldots t_n) \neq f(q_1 \ldots q_n)$" für die* Decompose*-Regel erhält man eine* Optimierung*, da dann* identische *Grundterme nicht unnötigerweise zerlegt werden – solche Paare von Grundtermen können* in einem Schritt *mittels der* Eliminate*-Regel eliminiert werden.*

Beispiel 2 *(Matchingkalkül)*

(1) Für die Terme t und q aus Beispiel 1(1) erhält man

$(\{\underline{h(g(x), y) \doteq h(g(f(a)), h(a, f(b)))}\}, \emptyset)$
$\Rightarrow (\{\underline{g(x) \doteq g(f(a))}, \underline{y \doteq h(a, f(b))}\}, \emptyset)$, mit Regel (b) *Decompose*
$\Rightarrow (\{\underline{g(x) \doteq g(f(a))}\}, \{y/h(a, f(b))\})$, mit Regel (a) *Solve*
$\Rightarrow (\{\underline{x \doteq f(a)}\}, \{y/h(a, f(b))\})$, mit Regel (b) *Decompose*
$\Rightarrow (\emptyset, \{x/f(a), y/h(a, f(b))\})$, mit Regel (a) *Solve*

(2) Für die Terme t und q aus Beispiel 1(3) erhält man

$(\{\underline{h(g(x), x) \doteq h(g(f(a)), h(a, f(b)))}\}, \emptyset)$
$\Rightarrow (\{g(x) \doteq g(f(a)), \underline{x \doteq h(a, f(b))}\}, \emptyset)$, mit Regel (b) *Decompose*
$\Rightarrow (\{\underline{g(h(a, f(b))) \doteq g(f(a))}\}, \{x/h(a, f(b))\})$, mit Regel (a) *Solve*
$\Rightarrow (\{\underline{h(a, f(b)) \doteq f(a)}\}, \{x/h(a, f(b))\})$, mit Regel (b) *Decompose*
$\not\Rightarrow$, keine Regel anwendbar

Für den Matchingkalkül gilt:

Satz 2 *(Eigenschaften des Matchingkalküls)*

(1) *(Korrektheit)* Sei $\sigma \in SUB$ eine Lösung von $A \subseteq_{fin} \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma)$. Dann gilt $\sigma(t) = q$ für alle $t \doteq q \in A$.

(2) *(Vollständigkeit)* Sei $A \subseteq_{fin} \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma)$ und sei $\theta \in SUB$ mit $\theta(t) = q$ für alle $t \doteq q \in A$. Dann gibt es eine Lösung von A.

(3) *(Minimalität)* Sei $A \subseteq_{fin} \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\Sigma)$, sei $\theta \in SUB$ mit $\theta(t) = q$ für alle $t \doteq q \in A$ und sei $\sigma \in SUB$ eine Lösung von A. Dann gilt $\sigma \subseteq \theta$.

Weitere Beispiele für Kalküle als Rechenmodell:
- Berechnungskalkül für die Semantik von $\mathcal{L}$-Programmen (=> **Kapitel 5**)
- Kalkül zur Überprüfung der Typkorrektheit von Termen
- λ-Kalkül (=> Berechenbarkeitstheorie)