Formale Grundlagen der Informatik 3 –

3. Spezifizieren, Beweisen und Testen

Christoph Walther
TU Darmstadt

1 Spezifikationen

1.1 Das Kunden-Produzenten Modell

- Kunde und Produzent schließen Vertrag
- Vertragsgegenstand: *Leistungsbeschreibung*
  - Was erhält der Kunde: Produkt
  - Was erhält der Produzent: Entlohnung
  - Geschäftsbedingungen: ...
- Hier von Interesse: *Produktbeschreibung* (= *Spezifikation*)

- *Informell*: "Eine Geldanlage mit hoher Rendite und geringem Verlustrisiko"
- *Halbformal*: Pläne und natürlichsprachliche Beschreibungen
- *Formal*: ?

Beispiel Hausbau:
- *Formal*: Bauplan/-modell des Architekten,
- *Informell*: Teile der Ausführung ("Anstrich in Pastellfarben")

Beispiel Informatik:
- *Informell*: Ein Programm, das feststellt, ob eine Folge von ASCII Zeichen ein syntaktisch korrektes JAVA Programm ist (Parser)
- *Informell*: Ein Programm, das eine Liste natürlicher Zahlen sortiert.

Wie formale Spezifikation?

Ansatz:

(1) Programm = Menge von Datentypen und Prozeduren, d.h. wir sprechen hier nur über Prozeduren, die auf bestimmten Datentypen ausgeführt werden

(2) Prozeduren berechnen Funktionen:
  (a) `function fact(x : nat): nat` <= ... berechnet die Fakultätsfunktion
  (b) `function sort(k : list[nat]): list[nat]` <= ... sortiert eine Liste natürlicher Zahlen

Also: Kunde bestellt *Prozeduren* (etwa mit Namen `fact` und `sort`), die (bestimmte) *Funktionen berechnen* und auf (bestimmten) Datenstrukturen arbeiten (formal: *Signatur* und *Datentypen*)

Anmerkung: Es gibt auch *nicht-berechenbare Funktionen*

=> Vorlesung *Berechenbarkeitstheorie*

Was sollen diese Funktionen leisten, d.h. *welche Eigenschaften* haben diese *Funktionen*?

Formal: Spezifiziere Eigenschaften von Funktionen in einer logischen, d.h. formalen Sprache

=> *Spezifikationssprache*

Beispiel: Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe

Spezifikation `fact`:

(1) $\forall x, y{:}nat.\ 1 \leq y \leq x \rightarrow fact(x)\ mod\ y = 0$,

soll heißen: jede natürliche Zahl zwischen 1 und x teilt $fact(x)$

Spezifikation `sort`:

(1) $\forall\ k : list[nat],\ i, j : nat.\ 0 \leq i \leq |k| - 1 \wedge 0 \leq j \leq |k| - 1 \wedge i \leq j \rightarrow element(sort(k), i) \leq element(sort(k), j)$,

soll heißen: die Elemente von $sort(k)$ sind aufsteigend geordnet

Reicht das zur Spezifikation ?

1.2 Das Validierungsproblem

Frage: Erfaßt die Spezifikation den Kundenwunsch ?

Beispiel: Produzent liefert Prozedur mit $fact(n) = 2 * 3 * ... * n * 2^n$
Kunde: Das habe ich nicht gemeint, ich wollte die Fakultätsfunktion **:-(**
Produzent: Das Produkt erfüllt die Spezifikation, ich habe den Vertrag erfüllt **:-)**

Beispiel: Produzent liefert Prozedur mit $sort(k) =< 1, 2, \ldots, |k| >$
Kunde: Das habe ich nicht gemeint, ich wollte, daß die Elemente von k sortiert werden **:-(**
Produzent: Das Produkt erfüllt die Spezifikation, ich habe den Vertrag erfüllt **:-)**

Lösung des Problems: Prinzipiell keine **!**

Das Validierungsproblem ist prinzipiell unlösbar – wie sollte man auch feststellen, ob das, was man* aufgeschrieben *hat, auch das ist, was man* meint *?

Ein gängiges Problem, das oft vor den Gerichten landet **!**

Reales Beispiel: Die Bahn hatte 60 Neigetechnikzüge $ICE2$ stillgelegt, da diese signifikante Betriebsstörungen aufwiesen.
Kunde (Bahn): Fordert Schadensersatz.
Produzent: Die Züge wurden so gebaut wie es spezifiziert war.

Fazit: Spezifikation nachbessern (vor Vertragsschluß!) und hoffen (*Validierungsproblem!*), daß die Spezifikation jetzt auch "stimmt".

Spezifikation `fact`:
(1) $\forall x, y{:}nat.\ 1 \leq y \leq x \rightarrow fact(x)\ mod\ y = 0$ **und**
(2) $\forall x, y{:}nat.\ y \geq 2 \wedge y > x \wedge (\forall z{:}nat.\ 2 \leq z \leq x \rightarrow y\ mod\ z \neq 0)$
$\rightarrow fact(x)\ mod\ y \neq 0$
soll heißen:
(1) jede natürliche Zahl zwischen 1 und x teilt $fact(x)$ **und**
(2) jede Zahl $y \geq 2$ mit $y > x$, die kein Vielfaches einer Zahl zwischen 2 und x ist, teilt nicht $fact(x)$.

Fazit: Spezifikation nachbessern (vor Vertragsschluß!) und hoffen (*Validierungsproblem!*), daß die Spezifikation jetzt auch "stimmt".

Spezifikation `sort`:
(1) $\forall\ k{:}list[nat],\ i, j{:}nat.\ 0 \leq i \leq |k| - 1 \wedge 0 \leq j \leq |k| - 1 \wedge i \leq j \rightarrow element(sort(k), i) \leq element(sort(k), j)$ **und**
(2) $\forall\ k{:}list[nat],\ n{:}nat.\ count(n, k) = count(n, sort(k))$

soll heißen:

(1) die Elemente von $sort(k)$ sind aufsteigend geordnet **und**
(2) jede natürliche Zahl n ist genauso oft in k enthalten wie in $sort(k)$, d.h. bei Sortieren werden keine Elemente "vergessen" und keine Elemente werden hinzugefügt.

Frage: Reicht das zur Spezifikation?

Was bedeuten eigentlich "$<$", "$\rightarrow$", "$\wedge$", "mod", "$=$", "$>$", "$\neq$", "$\leq$", "$|k|$", "$element$", "$\leftrightarrow$", "$count$", ... ?

***Darüber müssen sich Kunde und Produzent einig sein* !**

Lösung: Bezug auf *Normen, Standards, Gesetze, Verordnungen, Axiome, ...*

Aber: Wie detailliert die Begriffe auch beschrieben werden, letztendlich immer Rückgriff auf *natürliche Sprache*. D.h., zu guter Letzt werden *nicht-formal* definierte Begriffe verwendet.

Das gilt auch für die Mathematik !

Beispiel: "$A \wedge B$ ist *wahr*" genau dann, wenn sowohl A als auch B *wahr* sind.

Definiert formal "ist *wahr*", aber verwendet die nicht formal definierte Begriffe "*genau dann, wenn*", "*sowohl als auch*"

Einspruch: "$A \wedge B$ ist *wahr*" kann man ja auch über eine Wahrheitstafel definieren, und dann ist die Definition ja formal !

Antwort: Stimmt !

Aber: Was bedeuten eigentlich die Zeilen und Spalten der Wahrheitstafel? Entweder ist das genau so *offensichtlich*, wie die Bedeutung von "genau dann, wenn" und "sowohl als auch" *offensichtlich* ist, oder man definiert die Bedeutung der Wahrheitstafel (*formal -> formal -> ... ->* zum Schluß unvermeidbar *informell*).

Fazit: Es wird solange formal definiert, bis man auf Begriffe kommt, deren (natürlichsprachliche) Bedeutung *offensichtlich* ist.

Also: *Formale Reduktion* des *Komplexen* auf das *Einfache* (und Überschaubare).

Also nochmal Frage: Was bedeuten eigentlich "$<$", "$\rightarrow$", "$\wedge$", "mod", "$=$", "$>$", "$\neq$", "$\leq$", "$|k|$", "$element$", "$\leftrightarrow$", "$count$", ... ?

Einige Begriffe werden natürlich-sprachlich definiert, z.B. "$\rightarrow$"und "$\wedge$"

Einige Begriffe werden formal definiert (gründen dann aber letztendlich auch auf natürlich-sprachlichen Begriffen, formale Reduktion des Komplexen auf das Einfache), z.B. "mod", "$|k|$", "$element$"

Beispiel: Formale Spezifikation eines Sortierverfahrens

Was brauchen wir?

(1) Auf welchen Datentypen sind die gewünschten Funktionen definiert?
Also: Festlegung/Definition der Datentypen

(2) *Was* bilden die gewünschten Funktionen auf *was* ab?
Also: Festlegung/Definition der syntaktischen Definitions- und Wertebereiche (formal: *Signatur*)

(3) Welche Eigenschaften soll die gewünschte Funktion besitzen?
Wir brauchen weitere Funktionen (und eventuell auch Datentypen), um Eigenschaften zu spezifizieren, z.B. $ordered$ und $count$.

Was ist der Unterschied zwischen $sort$, $ordered$ und $count$?

- *Im Kunden-Produzenten Modell*: Es müssen keine Prozeduren für $ordered$ und $count$ geliefert werden.

  Also: Der Produzent muß den Nachweis "$sort$ berechnet geordnete Permutation" führen und verwendet dazu $ordered$ und $count$. Die Prozeduren $ordered$ und $count$ gehören aber nicht zum Lieferumfang des Auftrags "Sortierverfahren".

- *Formale Spezifikation*:
  (a) Definiere Begriffe der Lösung (z.B. $sort$) in einer Programmiersprache sowie Begriffe zur Spezifikation (z.B. *ordered* und $count$) in einer Spezifikationssprache
  (b) Definiere gewünschte Eigenschaften der Lösung (z.B. von $sort$) mittels Begriffen der Spezifikation (z.B. $ordered$ und $count$) durch Formeln der Spezifikationssprache. Damit ist Lösung (z.B. $sort$) formal spezifiziert!

Stimmen Kunde und Produzent bzgl. einer solchen Spezifikation überein, so wird diese zum "Vertragsgegenstand" (verbindliche Produktbeschreibung).

Wir sind noch nicht fertig: Wie wird der Vertrag durch den Produzenten erfüllt?

(4) Produzent implementiert Lösung (z.B. $sort$)

(5) Produzent weist nach, daß die Implementierung der Lösung (z.B. $sort$) die Spezifikation auch *erfüllt*, d.h. daß die (z.B. mittels $ordered$ und $count$) spezifizierten Eigenschaften auch tatsächlich gelten

Validierung Fallstudie *Insertion Sort* aus **Kapitel 2**:

- Produzent und Kunde "*glauben*", daß
  - `ordered` entscheidet, ob eine Liste bzgl. $\leq$ geordnet ist,
  - `count` die Anzahl der Vorkommen einer natürlichen Zahl in einer Liste zählt
- *Aber*: `insert` und `isort` sind nicht komplizierter als `ordered` und `count` **!**
- *Also*: Dann können wir doch auch gleich "*glauben*", daß `isort` eine geordnete Permutation berechnet und brauchen keine Verifikation **!**

Stimmt (aber nur, weil dies ein einfaches Beispiel ist):

- *Insertion Sort*:
  - **Implementierung:** 2 Datentypen und 3 Prozeduren
  - **Spezifikation:** 2 Prozeduren
- *Heap Sort*:
  - **Implementierung:** 3 Datentypen und 8 Prozeduren
  - **Spezifikation:** 2 Prozeduren

Fazit:

Ohne Verifikation müßten wir bei *Heap Sort* schon sehr *viel mehr* "*glauben*".

1.3 Spezifizieren in *VeriFun*

- Sprache $\mathcal{L}$ von *VeriFun* ist eine *Programmier-* und *Spezifikationssprache*
  - *Programme*: Definition von Datentypen und Prozeduren
  - *Spezifikationen*: Definition von Datentypen, Prozeduren und Lemmata
- *Beispiel* Fallstudie *Insertion Sort* aus **Kapitel 2**:
  - *Programm*:
    - `structure nat`,
    - `structure list`,
    - `function` $\leq$,
    - `function insert`
    - `function isort`
  - *Spezifikation*:
    - `function ordered`,
    - `function count`,
    - `lemma isort_sorts`,
    - `lemma isort_permutes`
  - *Restliche Lemmata*: "Hilfs"lemmata zum Nachweis "Programm erfüllt Spezifikation" (=> beweise `isort_sorts` und `isort_permutes`)

Also:

In *VeriFun* wird *algorithmisch* (= konstruktiv) *spezifiziert*, denn Begriffe wie "geordnete Liste" und "Anzahl der Vorkommen in einer Liste" werden durch *Prozeduren* (=> `ordered` und `count`) *definiert*

Algorithmische Spezifikation:

- *Vorteile*:
  - Kein zusätzlicher Aufwand bei Implementierung eines Beweissystems (=> Prozeduren haben wir ja schon)
  - Algorithmische Definitionen unterstützen signifikant *Automatisierung der Beweissuche*
- *Nachteile*:
  - Mitunter umständliche und unübersichtliche Modellierungen
    - Beispiel: *Nicht-freie* Datentypen wie *ganze Zahlen*, *Mengen*, ...
    - Beispiel: Modellierung von *Verbänden*, *Gruppen*, *Ringen*, *Körpern*, *Vektorräumen*, ...

Alternative:

Axiomatische Spezifikation = Begriffe werden durch Axiome definiert

- *Vorteile*:
  - Elegante und verständliche Modellierungen auch bei *nicht-freien* Datentypen wie *ganze Zahlen*, *Mengen*, ... sowie Strukturen wie *Verbände*, *Gruppen*, *Ringe*, *Körper*, *Vektorräume*, ...
- *Nachteile*:
  - Zusätzlicher Aufwand bei Implementierung eines Beweissystems
  - Höherer *Interaktionsbedarf* bei Beweissuche

Fazit:

Ein Verifikationssystem sollte beide Spezifikationsformen zur Verfügung stellen

- *VeriFun 3.2.2*: Algorithmische Spezifikationen
- *VeriFun 4* (demnächst verfügbar): Zusätzlich axiomatische Spezifikationen

Ab jetzt:

- Keine Unterscheidung ob Datentyp- und Prozedurdefinitionen zum Programm oder zur Spezifikation eines Programms gehören.
- *Also*: Wir betrachten ab jetzt nur Programme sowie Lemmata über diese Programme, die bewiesen werden sollen

2 Beweisen in *VeriFun*

2.1 Der *HPL*-Kalkül

- Beweise werden in *VeriFun* mittels des sogenannten *HPL-Kalküls* erstellt (=> **H***ypotheses*, **P***rograms* and **L***emmas*)

(1) **Formeln des *HPL*-Kalküls:** *Sequenzen* seq der Form $\langle H, IH \Vdash goal \rangle$ mit
  - $H =$ endliche Menge von *Literalen* (= Menge der *Hypothesen*)
  - $IH =$ endliche Menge von (universell quantifizierten und nicht geschlossenen) *boolschen Termen* (= Menge der *Induktionshypothesen*)
  - $goal =$ boolscher Term (= *Beweisziel*)

(2) **Beweisregeln des *HPL*-Kalküls:** (Für Sequenzen $seq, seq_1, \ldots, seq_n$) Regeln der Form

$$\frac{seq}{seq_1, \ldots, seq_n} \qquad (1)$$

(3) **Herleitungen im *HPL*-Kalkül:**
  - *Beweisbäume*, deren Knoten jeweils mit einer *HPL-Sequenz markiert* sind
  - *Wurzelmarkierung* des *Beweisbaums* eines *Lemmas* mit Rumpf $body_{lem}$:

$$\langle \emptyset, \emptyset \Vdash body_{lem} \rangle$$

– Hat ein Knoten k des Beweisbaums mit Markierung seq die Nachfolgerknoten $k_1, \ldots, k_n$ mit den Markierungen $seq_1, \ldots, seq_n$, so gibt es eine *HPL*-Regel der Form (1)

Semantik von *HPL*-Sequenzen:

- Eine Sequenz $seq = \langle H, IH \Vdash goal \rangle$ *repräsentiert* die Formel[1] $\varphi_{seq} = \forall \ldots \left[\bigwedge_{h \in H} h \equiv \texttt{true} \wedge \bigwedge_{\forall \ldots ih \in IH} \forall \ldots (ih \equiv \texttt{true}) \rightarrow goal \equiv \texttt{true} \right]$.
- Eine Sequenz seq ist "*wahr*" gdw. φ_{seq} "*wahr*" ist .
- φ_{seq} ist "*wahr*" => **Kapitel 12** (Definition 15).

Eigenschaften der *HPL*-Regeln: Für jede *HPL*-Regel wie unter (1) gilt:

(1) seq_1 ist "*wahr*" $\wedge \ldots \wedge$ seq_n ist "*wahr*" $\Rightarrow$ seq ist "*wahr*".

(2) *Insbesondere gilt*: Jede Sequenz $\langle H, IH \Vdash \texttt{true} \rangle$ ist "*wahr*".

(3) *Mit* (1) *und* (2): Sind alle *Blätter* eines Beweisbaums mit Sequenzen der Form $\langle H, IH \Vdash \texttt{true} \rangle$ *markiert*, so ist die Sequenz des *Wurzelknotens* "*wahr*".

(4) *Konsequenz*: Sind alle *Blätter* eines Beweisbaums eines *Lemmas* `lem` mit Sequenzen der Form $\langle H, IH \Vdash \texttt{true} \rangle$ *markiert*, so ist das *Lemma* "*wahr*".

[1] "$\equiv$" ist das Gleichheitszeichen der Prädikatenlogik 1. Stufe, also ein *Prädikatensymbol* (=> **Kapitel 9**, Folie 5).

Erzeugung von Beweisbäumen durch **Divide-and-Conquer Prinzip** (=> GdI 2):

- Zerlege Problem solange in Unterprobleme, bis diese (einfach) lösbar sind, und bilde aus der Lösung der Unterprobleme die Lösung des Ausgangsproblems
- *Hier*: Durch Anwendung einer *HPL*-Regel wird aus einer Sequenz seq eine *Menge* $\{seq_1, \ldots, seq_n\}$ von *Sequenzen* gewonnen, deren *Wahrheit* die *Wahrheit* von seq *impliziert*
- *Also*: Zerlege eine Sequenz (mittels der *HPL*-Regeln) solange in Untersequenzen, bis diese (einfach) beweisbar sind (=> $\langle H, IH \Vdash \texttt{true} \rangle$), und bilde aus dem Beweis der Untersequenzen den Beweis der Ausgangssequenz

Anzeige von *HPL*-Sequenzen in *VeriFun*:

- *HPL*-Sequenz des *Knotens* eines *Beweisbaums* (=> *Proof Window*):
  - Hypothesen H => Reiter *Hypotheses* im *Proof Viewer*
  - Induktionshypothesen IH => Reiter *Induction Hypotheses* im *Proof Viewer*
  - Beweisziel $goal$ => Anzeige *Goal* im *Proof Viewer*

Beispiel: *HPL*-Sequenzen im Beweis von Lemma `isort_sorts`

- *Wurzelknoten*: $\langle \emptyset, \emptyset \Vdash \texttt{ordered(isort(k))} \rangle$
- Knoten des *Induktionsanfangs*: $\langle \{\texttt{?ø(k)}\}, \emptyset \Vdash \texttt{ordered(isort(k))} \rangle$
- Knoten des *Induktionsschritts*: $\langle \{\texttt{?::(k)}\}, \{\texttt{ordered(isort(tl(k)))}\} \Vdash \texttt{ordered(isort(k))} \rangle$

2.2 Editieren von *HPL*-Beweisen (= Erzeugen von Beweisbäumen)

- Folgende *HPL*-Regeln stehen zur Verfügung
  (System => Menue *Proof\Proof Rules*; Details => *VeriFun User Guide*):

(1) **Simplification**: Ruft *symbolischen Interpreter* (= *Symbolic Evaluator*) zur "Vereinfachung" des Beweisziels $goal$ einer Sequenz auf (=> **Kapitel 10**)

(2) **Weak Simplification**: Wie (1), jedoch mit anderen Aufrufparametern.

(3) **Normalization**: Wie (1), jedoch mit anderen Aufrufparametern.

(4) **Weak Normalization**: Wie (1), jedoch mit anderen Aufrufparametern.

(5) **Inconsistency**: Ruft den *Symbolic Evaluator* zur Widerlegung der Hypothesenmenge H einer Sequenz auf (=> **Kapitel 10**)

$\Rightarrow$ *Sprechweise*: Die *HPL*-Regeln (1) – (5) werden auch als ***Computed Proof Rules*** bezeichnet

(6) **Case Analysis**: Führt eine Fallunterscheidung im Beweisziel $goal$ einer Sequenz durch.

(7) **Use Lemma**: Wendet ein Lemma oder eine Induktionshypothese an
$\Rightarrow$ *nicht bewiesene* Lemmata (= Status *ready*) dürfen angewendet werden

(8) **Unfold Procedure**: Ersetzt einen Prozeduraufruf im Beweisziel $goal$ einer Sequenz durch den instantiierten Prozedurrumpf

(9) **Apply Equation**: Wendet eine Gleichung aus einer Hypothese, einer Induktionshypothese oder einem Lemma an
⇒ auch Gleichungen aus *nicht bewiesenen* Lemmata (= Status *ready*) dürfen angewendet werden

(10) **Purge**: Ersetzt *let*-Bindungen im Beweisziel $goal$ einer Sequenz
⇒ *let*-Ausdrücke werden in Abschnitt 1.3.2 von **Kapitel 5** definiert

(11) **Induction**: Bildet *Induktionsformeln* (= *Induktionsanfänge* und *Schrittfälle*); Details in **Kapitel 7**, Abschnitt 4

(12) **Insert Induction Hypotheses**: Bildet Instanzen von Induktionshypothesen
⇒ wird selten benötigt, brauchen wir hier nicht

(13) **Insert Hypotheses**: Führt eine Fallunterscheidung in der Hypothesenmenge H einer Sequenz durch

(14) **Move Hypotheses**: Verschiebt Hypothesen aus der Hypothesenmenge H einer Sequenz in das Beweisziel $goal$

(15) **Delete Hypotheses**: Löscht Hypothesen aus der Hypothesenmenge H einer Sequenz

Mit den Beweisregeln des *HPL*-Kalküls werden *Beweise* für $\mathcal{L}$-Lemmata "editiert" und damit *Beweisbäume* erstellt (=> *Proof Window*)

- Nach Eingabe eines Lemmas `lem` (=> Menue *Program**Insert Element*) erzeugt System *initialen Beweisbaum* (= nur Wurzelknoten) für `lem`
  - *Voraussetzung*: Lemma erhält Status "ready" (= *blaues* Lemma-Icon); falls im Lemmarumpf Prozeduren aufgerufen werden, deren *Terminierung* (=> **Kapitel 8**) *nicht nachgewiesen* wurde, so gilt Lemmastatus $\neq$ "ready" **!**
- *Erstellen* von Beweisen in *VeriFun*
  - **Benutzer:** Selektiert im *Program Window* ein Lemma
  - **Benutzer:** Öffnet mit *Program**Proof* den Beweisbaum des Lemmas im *Proof Window*
  - **Benutzer:** Selektiert im *Proof Window* ein Blatt des Beweisbaums
  - **Benutzer:** Wählt in *Proof**Proof Rules* eine *HPL*-Regel aus
  - **Benutzer:** Editiert Parameter für die ausgewählte Regel (falls erforderlich)
  - **System:** Überprüft Anwendbarkeit der Regel und Gültigkeit der angegebenen Parameter
  - **System:** Erweitert Beweisbaum durch Anfügen von Sohnknoten an dem ausgewählten Beweisbaumblatt

2.3 Die *Verify*- und die *NextRule*-Taktiken

Die *Verify*- und die *NextRule*-Taktiken
- berechnen Anwendungsfolgen von *HPL*-Regeln, die "oft" zum Erfolg führen
- Die *Verify*-Taktik wird durch *Benutzer* mit *Program**Verify* für ein Lemma gestartet, das im *Program Window* selektiert ist
- Die *NextRule*-Taktik wird *automatisch* nach jeder interaktiven Anwendung einer *HPL*-Regel gestartet
- **Zweck beider Taktiken:** *Entlastung* des *Benutzers* von *Interaktionen*
  => Auswahl von *HPL*-Regeln und Eingabe von Regelparametern
- *Anzeige* im *Beweisbaum*: $<$*Regelname*$>^*$,
  => Suffix "$*$" zeigt an, daß die Regel automatisch ausgewählt wurde
- Beide Taktiken sind mittels *Heuristiken* implementiert
  => können also auch Unbrauchbares produzieren
- **Deshalb:**
  - *NextRule*-Taktik kann in *Options**User Settings* abgestellt werden
  - beide Taktiken können in *Window**Open Proof Control* abgebrochen werden
    => Selektiere Task im *Proof Control Window* mit Maus-rechts und wähle dann *Cancel*

Was wird hier unter *Heuristik* verstanden ?

- bezeichnet Kriterium zur *Auswahl* unter mehreren möglichen Folgeschritten bei *unentscheidbaren Problemen*
  => Indeterminismus determinieren
- **Zweck:** "Möglichst gute" Bestimmung eines Folgeschritts
  => "möglichst gut" bzgl. der Berechnung der Lösung eines Problems
- Heuristiken sind
  - **nie** *richtig* oder *falsch*
  - entweder *gut* (= oft erfolgreich) oder *schlecht* (= selten erfolgreich)
- *Güte* einer Heuristik kann nur *empirisch* festgestellt werden
  => analysiere große Anzahl von Lösungsversuchen
- **Beispiel:**
  Erfolgsquote bei heuristisch gesteuerter automatischer Auswahl der *HPL*-Regel *Induction* in *VeriFun*: $> 95\%$

Beispiel: Güte der Heuristiken in der Fallstudie *InsertionSort*
- Erfolgsquote *Verify*- und *NextRule*-Taktik $= 100\%$
- D.h. keine Benutzerinteraktion zum Erstellen der Beweisbäume notwendig (wenn die erforderlichen Lemmata formuliert sind)
- Verwendete *HPL*-Regeln hier nur *Induction* und *Simplification*
- *Aber*: Bei *InsertionSort* gibt es auch keine sooo schwierigen Beweisprobleme

Beispiel: Güte der Heuristiken in der Fallstudie *HeapSort*
- Erfolgsquote *Verify*- und *NextRule*-Taktik $= 92,7\%$
- 15 Benutzerinteraktion (= 7.3%) zum Erstellen der Beweisbäume notwendig (wenn die erforderlichen Lemmata formuliert sind)
- Verwendete *HPL*-Regeln hier neben *Induction* und *Simplification*
  - $3\times$ *Case Analysis*
  - $5\times$ *Use Lemma*
  - $2\times$ *Unfold Procedure*
  - $5\times$ *Apply Equation*

3 Testen in *VeriFun*

- *Programme* sind oft *falsch*
- *Behauptungen über Programmeigenschaften* (hier: *Lemmata*) sind oft *falsch*
- **Dann:** Vergeudete Zeit und Frustration bei vergeblichen Beweisversuchen
- **Konsequenz:** *Testen*, *Testen*, *Testen*, ...
- Mit *Testen* versucht man *Fehler* in Programmen und/oder Lemmata zu *finden*
  - *erfolglos*, falls *ohne Fehler*
- Mit *Beweisen* versucht man *zu zeigen*, daß *keine Fehler* in Programmen und/oder Lemmata *existieren*
  - *erfolglos*, falls *mit Fehlern*
- ***VeriFun***: Testen mittels
  - des *symbolischen Interpreters* (= *Symbolic Evaluator*)
  - des *Disprovers* (= Widerlegungsbeweiser)

3.1 Testen durch symbolische Interpretation

3.1.1 Symbolische Interpretation von Termen

- Mit dem symbolischen Interpreter (= *Symbolic Evaluator*) können Terme durch "Ausrechnen" *vereinfacht* werden
- "*symbolisch*": Auch Terme, die *Variable* enthalten, können "ausgerechnet" werden
- **Beispiel**:

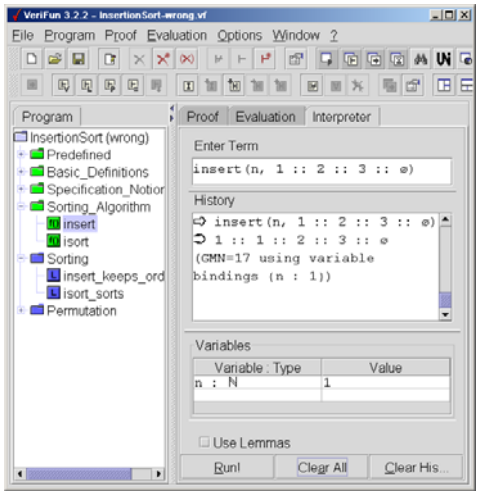
```
function [infixr,20] +(x:ℕ, y:ℕ):ℕ <=
if ?0(x) then y else +(−(x) + y) end_if
```

  - *Eingabe*: `3 + y` ; *Ergebnis*: `+(+(+(y)))` ('+' wurde "ausgerechnet")
  - *Eingabe*: `y + 3` ; *Ergebnis*: `y + 3` ('`y + 3`' kann nicht "ausgerechnet" werden)

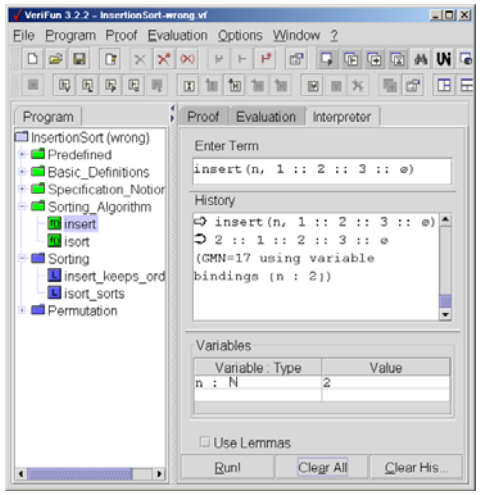
- Um Terme symbolisch "auszurechnen", werden diese im *Interpreter Window* eingegeben

- **Beispiel:** Fehlerhafte Implementierung von `insert`:

```
function insert(n : ℕ, k : list[ℕ]) : list[ℕ] <=
if ?ø(k)
 then n :: ø
 else if hd(k) ≤ n
        then n :: k
        else hd(k) :: insert(n, tl(k))
       end_if
end_if
```



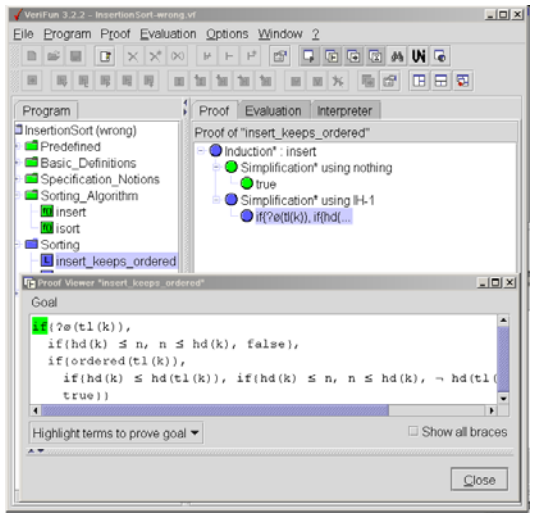
- Wir fügen 1 in die Liste `1 :: 2 :: 3 :: ø` ein und erhalten als Ergebnis `1 :: 1 :: 2 :: 3 :: ø`
- *Test erfolglos* **!**
- Aber vorsichtshalber noch ein Versuch ...



- Wir fügen 2 in die Liste `1 :: 2 :: 3 :: ø` ein und erhalten als Ergebnis `2 :: 1 :: 2 :: 3 :: ø`
- *Test erfolgreich*, 2 wurde nicht an der richtigen Stelle eingefügt **!**
- **Jetzt:** Fehler in `insert` *suchen* und *reparieren* und danach wieder *testen*

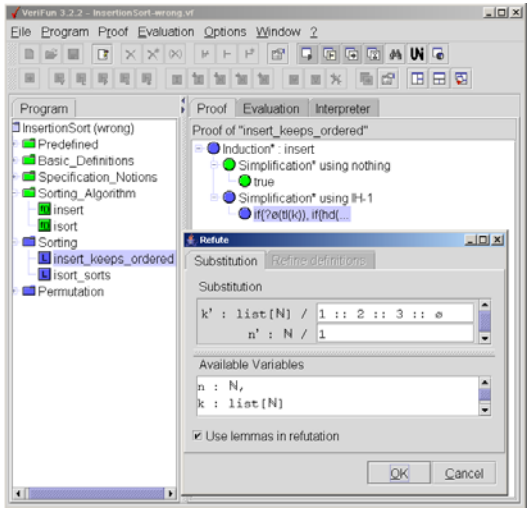
3.1.2 Symbolische Interpretation von *HPL*-Sequenzen

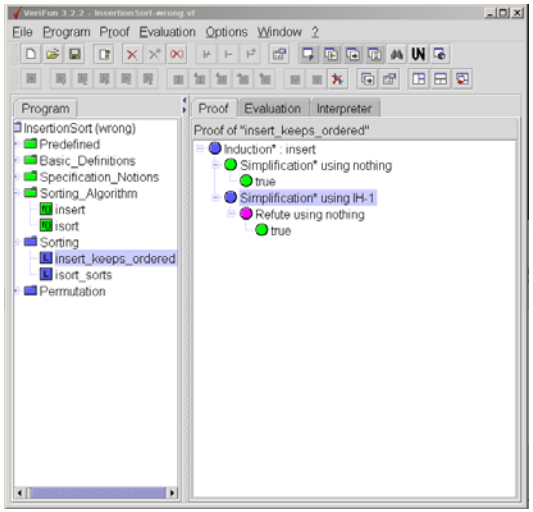
- *HPL*-Sequenzen seq können getestet werden, indem Variable $x{:}\tau$ (aus seq) durch Terme $t{:}\tau$ ersetzt werden und die so gebildete Instanz seq' von seq durch den symbolischen Interpreter "ausgerechnet" wird
  - *Ergebnis* = `true`: Test erfolglos
  - *Ergebnis* = `false`: Test erfolgreich, die Terme $t{:}\tau$ bilden ein *Gegenbeispiel* für die Gültigkeit der Sequenz
  - *Ergebnis* $\notin \{$`true`, `false`$\}$: Test weder erfolgreich noch fehlgeschlagen (=> andere Terme $t{:}\tau$ wählen)
- Instanzen einer *HPL*-Sequenz werden mittels des Kommandos *Refute* aus dem *Proof Menue* eingegeben



- Beweis von Lemma `insert_keeps_ordered` scheitert (wegen fehlerhaftem `insert`)

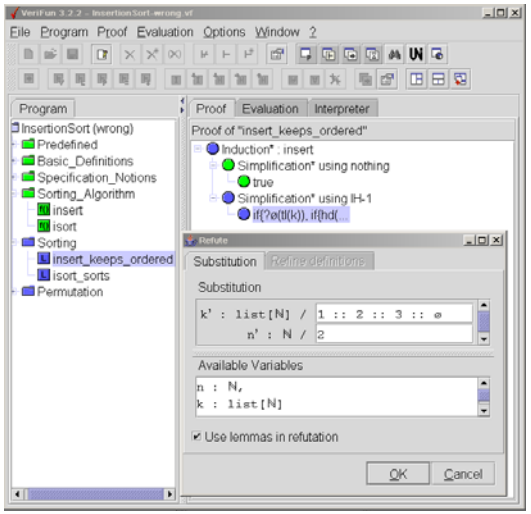
- Wir testen die *HPL*-Sequenz mit `k` := `1 :: 2 :: 3 :: ø` und `n` := `1`

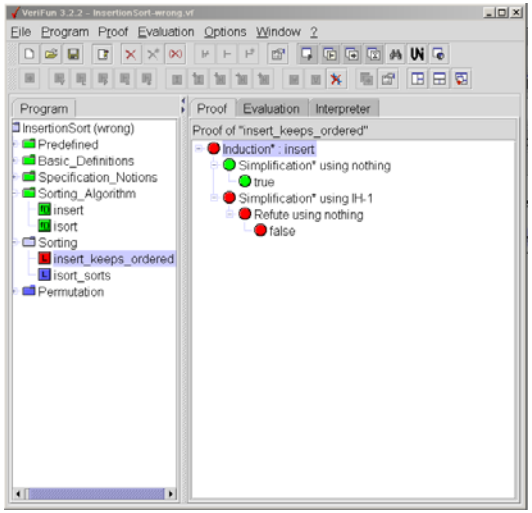




- *Test erfolglos* **!**
- Aber vorsichtshalber noch ein Versuch ...

- Wir testen die *HPL*-Sequenz mit `k` := `1 :: 2 :: 3 :: ø` und `n` := `2`



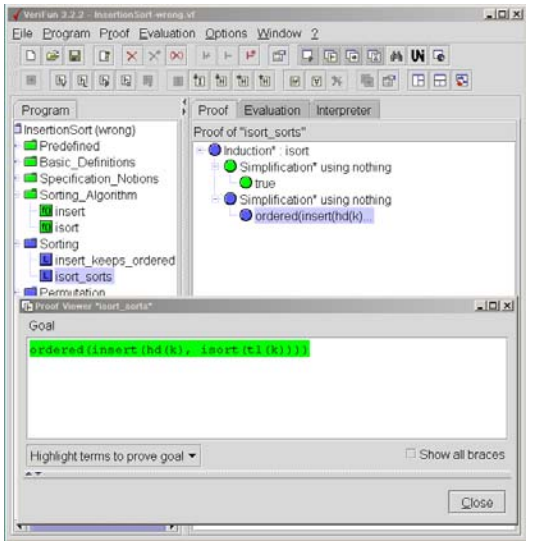


- *Test erfolgreich* – mögliche Fehler
  - `insert` und/oder `ordered` falsch implementiert
  - Behauptung von `insert_keeps_ordered` ist falsch
- **Jetzt:** Fehler *suchen* und *reparieren* und danach wieder *testen*

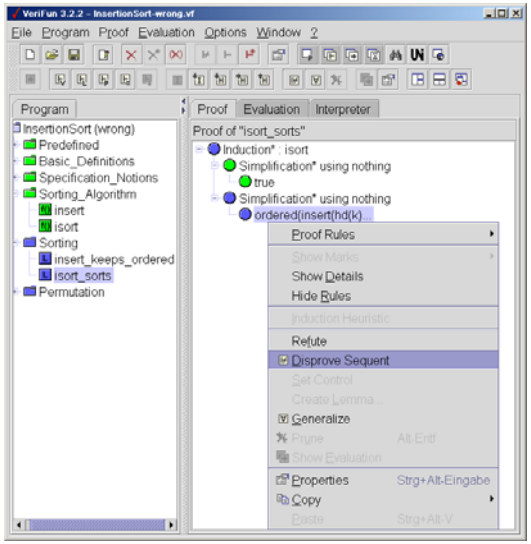
3.2 Testen mit dem *Disprover*

3.2.1 Widerlegung von *HPL*-Sequenzen

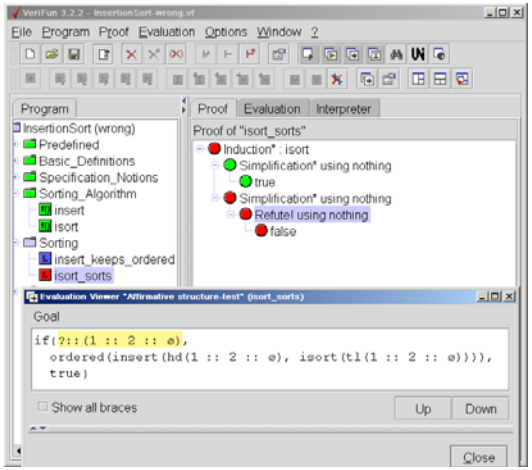
- Der *Disprover* ist ein *automatischer Widerlegungsbeweiser*
- Versucht eine *HPL*-Sequenz seq zu *widerlegen*
- **Vorgehen**: *Finde* für Variable $x{:}\tau$ in seq einen Term $t{:}\tau$, so daß seq nach Ersetzung der Variablen x durch t falsch wird
- **Damit**: Der *Disprover* versucht *automatisch Eingaben* für *Refute* zu finden, für die ein Test erfolgreich ist



- Beweis von Lemma `isort_sorts` scheitert (bei fehlerhaftem `insert`)
- Wir testen die *HPL*-Sequenz mit dem *Disprover*



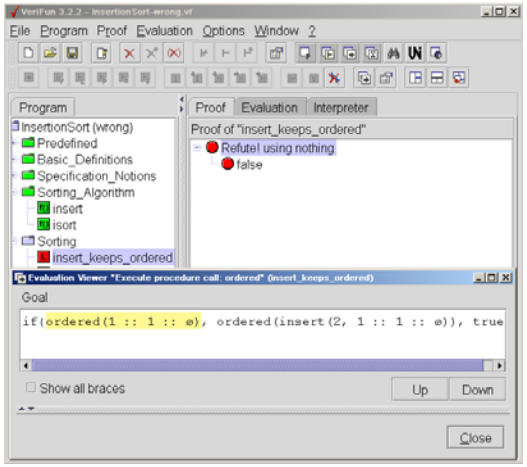
- Aufruf des *Disprovers* mittels *Disprove Sequent* im *Proof* Menue



- Anzeige des Ergebnisses im *Evaluation Viewer* (=> Doppelklick auf *Refute!*-Knoten im Beweisbaum)
- Der *Disprover* hat die Instanz `1 :: 2 :: ø` für `k` gefunden, d.h. für `k` := `1 :: 2 :: ø` berechnet `isort` *keine* sortierte Liste

3.2.2 Widerlegung von Lemmata

- Lemmata `lem` können auch “direkt” durch den *Disprover* widerlegt werden
- **Voraussetzung**:
  Der Beweisbaum von `lem` besteht *nur* aus dem *Wurzelknoten* (= initialer Beweisbaum)
  => gegebenenfalls Baum mittels *Proof\Prune* an der Wurzel abschneiden
- **Aufruf** des *Disprovers*:
  – Selektiere Lemma-Icon im *Programm Window*
  – Wähle *Disprove Lemma* im *Program Menue*
- **Reaktion**:
  System wendet *Disprove Sequent* auf den Wurzelknoten des Beweisbaums an



- Anzeige des Ergebnisses im *Evaluation Viewer*
  (=> Doppelklick auf *Refute!*-Knoten im Beweisbaum)
- Der *Disprover* hat die Instanz `1 :: 1 :: ø` für `k` und `2` für `n` gefunden, d.h. für diese Werte von `k` und `n` ist `insert_keeps_ordered` *widerlegt* **!**

3.3 Hinweise zum Testen in *VeriFun*

- *Prozeduren* testet man am besten mit geeigneten Testeingaben mittels des *symbolischen Interpreters* (vgl. Folie 27 ff.)
- *Lemmata* testet man am besten zunächst mit *Disprove Lemma* (s. Folie 41)
  – Mögliche Ergebnisse:
  1. *Disprover* findet Gegenbeispiel
     ⇒ jetzt Fehler suchen
  2. *Disprover* hält ohne Gegenbeispiel mit entsprechender Meldung im *System Log*
     ⇒ In *Options\User Settings* andere *Suchstrategie* für den *Disprover* einstellen *oder*
     ⇒ mit *Proof\Refute* selbst Kandidat für Gegenbeispiel formulieren (*Achtung:* Falls das Lemma wahr ist, so werden der *Disprover* und man selbst **nie** erfolgreich sein **!**)
  3. *Disprover* hält nicht
     ⇒ *Proof Control* mit *Window\Open Proof Control* öffnen, *Disprover* in *Proof Control* beenden, weiter wie bei 2.

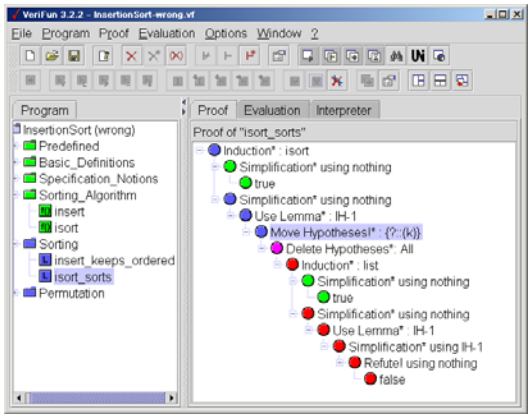
Widerlegungen mittels *Disprove Sequent*

- Die Berechnung eines Gegenbeispiels für ein Lemma mittels *Disprove Lemma* kann wegen der Größe des Suchraums scheitern
- Da man kein Gegenbeispiel kennt, versucht man das Lemma zu beweisen
- Durch Anwendung der *HPL*-Regeln erhält man Sequenzen, die den *Suchraum* für den *Disprover einschränken*
- **Konsequenz:** *Disprove Sequent* kann *erfolgreich* sein (und damit ein Lemma widerlegen) auch wenn *Disprove Lemma scheitert*
- **Beispiel:** *Disprove Lemma* scheitert bei `isort_sorts`, *Disprove Sequent* ist jedoch im *Induktionsschritt* erfolgreich (=> ausprobieren)

Anwendungen von *Disprove Sequent*

- Die *Verify*- und *NextRule*-Taktiken erzeugen meist Beweisbäume mit geschachtelter Induktion
- In den meisten Fällen ist es sinnvoll, den Beweisbaum an dem ersten Knoten, der kein *Simplification**-Knoten ist, mittels *Proof\Prune* abzuschneiden und dann *Disprove Sequent* auf das resultierende Blatt des Beweisbaums anzuwenden

- **Achtung:** Ein *Delete Hypotheses*-Knoten sollte *nicht oberhalb* der Anwendung von *Disprove Sequent* stehen.
- **Grund:** Für alle *HPL*-Regeln R **außer** *Delete Hypotheses* gilt:
  Ist eine HPL-*Sequenz* seq "wahr", *so sind auch* alle $seq_1, \ldots, seq_n$ *(die aus* seq *durch Anwendung von* R *entstehen)* "wahr".
- **Damit:** Ist *eine* der *HPL*-Sequenzen seq_i "*falsch*", so ist auch seq "*falsch*" (und damit die *HPL*-Sequenz an der *Wurzel* des Beweisbaums und damit das *Lemma*, zu dem der Beweisbaum gehört)
- **Aber:** Entsteht die *HPL*-Sequenz seq' aus seq durch Anwendung von *Delete Hypotheses*, so **gilt nicht** 'seq "wahr" $\rightarrow$ seq' "wahr"', und damit **nicht** 'seq' "*falsch*" $\rightarrow$ seq "*falsch*"'
- **Konsequenz**: Die Widerlegung einer *HPL*-Sequenz seq wird im Beweisbaum nur bis zum ersten *Delete Hypotheses*-Knoten oberhalb von seq (und nicht bis zur Wurzel) propagiert; ein Lemma kann so nicht widerlegt werden **!**



- Widerlegungen von *HPL*-Sequenzen werden nur bis zum ersten *Delete Hypotheses*-Knoten propagiert

Fehleranalyse – "Wo steckt der Fehler ?"

- Die Berechnungen des symbolischen Interpreters werden im *Evaluation Viewer* angezeigt
- Öffnen des *Evaluation Viewer*:
  - bei Eingabe im *Interpreter Window*: *Open Evaluation Viewer* im *Window* Menue
  - bei Widerlegung einer *HPL*-Sequenz: Doppelklick auf *Refute*-Knoten im Beweisbaum des *Proof Windows*
  - bei Widerlegung eines Lemmas: Beweisbaum mit *Program**Proof* im *Proof Window* öffnen und dann Doppelklick auf *Refute*-Knoten (= Wurzel) im Beweisbaum
- Im *Evaluation Viewer* können die einzelnen Rechenschritte mittels der *Up*/*Down*-Buttons oder der $\downarrow$ / $\uparrow$-Tasten nachvollzogen werden
- Dabei die einzelnen Schritte *analysieren*:
  "*Ist Ergebnis so, wie man es erwartet ?*"
  - *Nein* – hier steckt der Fehler (=> fehlerhafte Implementierung einer Prozedur; fehlerhafte Behauptung eines Lemmas)
  - *Ja* – nächster Schritt (=> *Down*-Button oder $\downarrow$-Taste)