Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

Übung 6

Version 1 vom 24.01.2012

Aufgabe 6.1 (Induktion)

Betrachten Sie das folgende $\mathcal{L}$-Programm P:

```
structure bool <=
  true, false

structure ℕ <=
  0, ⁺(⁻ : ℕ)

function dbl(n : nat) : nat <=
if ?0(n)
  then 0
  else ⁺(⁺(dbl(⁻(n))))
end_if

function even(n : nat) : bool <=
if ?0(n)
  then true
  else if even(⁻(n))
    then false
    else true
  end_if
end_if

lemma double_is_even <= ∀ x : ℕ
      even(dbl(x))
```

Beweisen Sie $AX_{\texttt{double\_is\_even}}$ durch Induktion über `x` mittels der Relationenbeschreibung

$$R := \{\langle\{\texttt{?0(x)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{\neg\texttt{?0(x)}\}, \{\{\texttt{x}/^{-}\texttt{(x)}\}\}\rangle\}.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Menge AX_P der Axiome zum Programm P an, verweisen Sie dazu gegebenenfalls auf Beispiele aus den Vorlesungsunterlagen.

(b) Bilden Sie die Induktionsformeln (nach Kapitel 6, Folie 19f.) in Form von HPL-Sequenzen $seq_{\mathcal{I}_i}$ für den Rumpf b des Lemmas `double_is_even` und eine geeignete Umbenennung R' von R.

(c) Beweisen Sie die Induktionsformeln $\mathcal{I}_i$, zeigen Sie also für jede Sequenz $seq_{\mathcal{I}_i} = \langle H_i, IH_i \Vdash b\rangle$:

$$AX_P \cup \mathcal{E}_P \models \forall x : \mathbb{N} \left(\bigwedge_{h \in H_i} h \equiv \texttt{true} \wedge \bigwedge_{ih \in IH_i} ih \equiv \texttt{true} \right) \rightarrow b \equiv \texttt{true}$$

Geben Sie in jedem Schritt an, welche Gleichung Sie anwenden.

Aufgabe 6.2 (Induktion)

Betrachten Sie das folgende $\mathcal{L}$-Programm P:

```
structure bool <=
  true, false

structure ℕ <=
  0, ⁺(⁻ : ℕ)

structure list[@I] <=
  ø, [infixr,100] ::(hd : @I, tl : list[@I])

function append(k, l : list[@I]) : list[@I] <=
if ?ø(k)
  then l
  else hd(k) :: append(tl(k), l)
end_if

lemma left neut <= ∀ k : list[@I]
  append(ø, k) = k

lemma right neut <= ∀ k : list[@I]
  append(k, ø) = k
```

(a) Geben Sie die Axiome $AX_{\texttt{list[@I]}}$ und $AX_{\texttt{append}}$ an. Verweisen Sie dazu gegebenenfalls auf Beispiele aus den Vorlesungsunterlagen.

(b) Beweisen Sie das Lemma `left neut`.

(c) Bilden Sie die Induktionsformeln in Form von HPL-Sequenzen für den Rumpf b des Lemmas `right neut` und die Relationenbeschreibung

$$R' := \{\langle\{\texttt{?ø(k)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{\texttt{?::(k)}\}, \{\{\texttt{k/tl(k)}\}\}\rangle\}.$$

(d) Beweisen Sie die Induktionsformeln $\mathcal{I}_i$, zeigen Sie also für jede Sequenz $seq_{\mathcal{I}_i} = \langle H_i, IH_i \Vdash b\rangle$:

$$AX_P \cup \mathcal{E}_P \models \forall k : \texttt{list[@I]} \left(\bigwedge_{h \in H_i} h \equiv \texttt{true} \wedge \bigwedge_{ih \in IH_i} ih \equiv \texttt{true} \right) \to b \equiv \texttt{true}$$

Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Gleichung an.