Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

Lösungsvorschlag zu Übung 5

Version 1 vom 13.01.2012

Aufgabe 5.1 (Terminierung und Maßterme)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Falls alle Terminierungshypothesen widerlegt werden, die zu einem Maßterm erzeugt werden, so terminiert die Prozedur nicht.

Lösungsvorschlag

Die Aussage ist falsch. Die Prozedur `half` aus Beispiel 1 in Kapitel 8 terminiert, doch für den Maßterm `0` erhält man die ungültige Terminierungshypothese

$$th_A = \forall \mathtt{x} : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{x}), \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{pred}(\mathtt{x})), 0 > 0, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}.$$

- Terminiert eine Prozedur nicht, dann kann jede Terminierungshypothese, die für irgendeinen Maßterm zu dieser Prozedur erzeugt wird, widerlegt werden.

Lösungsvorschlag

Die Aussage ist falsch. Die Prozedur

```
function f(x, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x)
  then 0
  else if x > y
         then f(y, y)
         else f(x, y)
       end_if
end_if
```

terminiert nicht, da mit $(\mathtt{x}, \mathtt{y}) >_{\mathtt{f}} (\mathtt{x}, \mathtt{y})$ die Rekursionsordnung $>_{\mathtt{f}}$ nicht fundiert ist. Dennoch ist die Terminierungshypothese für den ersten rekursiven Aufruf mit dem Maßterm `x` wahr, also nicht widerlegbar:

$$th_{A_1} = \forall \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\neg ?0(\mathtt{x}), \mathtt{if}\{\mathtt{x} > \mathtt{y}, \mathtt{x} > \mathtt{y}, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}$$

- Terminiert eine Prozedur nicht, so wird zu jedem Maßterm eine Terminierungshypothese erzeugt, die nicht bewiesen werden kann.

Lösungsvorschlag

Wir betrachten die Kontraposition: Gibt es einen Maßterm, so dass alle dazu erzeugten Terminierungshypothesen bewiesen werden können, so terminiert die Prozedur. Diese Aussage steht in ähnlicher Form auf Folie 25 von Kapitel 8.

Aufgabe 5.2 (Terminierungsbeweise)

Die Terminierung der folgenden Prozeduren wird von √eriFun nicht automatisch bewiesen, schon die Erzeugung von Terminierungshypothesen scheitert. Führen Sie einen Terminierungsbeweis für jede der folgenden Prozeduren. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Bestimmen Sie geeignete Maßterme für den Terminierungsbeweis. Überlegen Sie sich dazu, was bei den rekursiven Aufrufen gleich bleibt und was kleiner wird.
- Geben Sie die zusammengesetzte Relationenbeschreibung der Prozedur an.
- Bilden Sie aus den Maßtermen und der Relationenbeschreibung die Terminierungshypothesen, normalisieren Sie diese gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung und vereinfachen Sie sie danach.
- Führen Sie schließlich den Terminierungsbeweis in √eriFun.

  Beachten Sie: VeriFun akzeptiert nur Maßtermlisten, die höchstens die unter „Available Sets of Recursion Variables“ aufgeführten Variablen verwenden. Variablen, die bereits in anderen Maßtermlisten verwendet wurden („Chosen Measure Terms“), stehen nicht mehr zur Verfügung. Gegebenenfalls muss man also unnötige Maßtermlisten zuerst mittels des Remove-Buttons entfernen, wenn man eine andere Maßtermliste mit diesen Variablen formulieren möchte.

  Sehen Sie sich dazu auch die Beschreibung von „Set Termination“ im „VeriFun User Guide“ an.

```
function minus(x, y : ℕ) : ℕ <=
if x > y
  then succ(minus(x, succ(y)))
  else 0
end_if
```

Lösungsvorschlag

- Wir wählen den Maßterm `x - y`, wobei „-” wie in Übung 4 definiert ist.
- $R_{\texttt{minus}} = \{\langle\{\mathtt{x} > \mathtt{y}\}, \{\{\mathtt{x}/\mathtt{x}, \mathtt{y}/\mathtt{succ}(\mathtt{y})\}\}\rangle, \langle\{\neg\mathtt{x} > \mathtt{y}\}, \emptyset\rangle\}$
- Damit bilden wir die Terminierungshypothese

$$th_1 = \forall \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\mathtt{x} > \mathtt{y}, \mathtt{x} - \mathtt{y} > \mathtt{x} - \mathtt{succ}(\mathtt{y}), \mathtt{true}\}$$

```
function sum(k : list[ℕ]) : ℕ <=
if ?ø(k)
  then 0
  else if ?0(hd(k))
         then sum(tl(k))
         else succ(sum(pred(hd(k)) :: tl(k)))
       end_if
end_if
```

Lösungsvorschlag

- Wir wählen die Maßterme `length(k)` und `hd(k)`.
- $R_{\texttt{sum}} = \{\langle\{?\texttt{ø}(\texttt{k})\}, \emptyset\rangle, \langle\{\neg?\texttt{ø}(\texttt{k}), ?\texttt{0}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\}\{\{\texttt{k}/\texttt{tl}(\texttt{k})\}\}\rangle, \langle\{\neg?\texttt{ø}(\texttt{k}), \neg?\texttt{0}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\}\{\{\texttt{k}/\texttt{pred}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\texttt{::}\texttt{tl}(\texttt{k})\}\}\rangle$
- Damit bilden wir die Terminierungshypothesen

$$
\begin{aligned}
th_1 = \forall \texttt{k} : list[\mathbb{N}]\ & \texttt{if}\{\neg?\texttt{ø}(\texttt{k}),\\
& \quad \texttt{if}\{?\texttt{0}(\texttt{hd}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad \texttt{if}\{\texttt{length}(\texttt{k}) > \texttt{length}(\texttt{tl}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad\quad \texttt{true},\\
& \quad\quad\quad \texttt{if}\{\texttt{length}(\texttt{k})\texttt{=}\texttt{length}(\texttt{tl}(\texttt{k})), \texttt{hd}(\texttt{k}) > \texttt{hd}(\texttt{tl}(\texttt{k})), \texttt{false}\}\},\\
& \quad\quad \texttt{true}\},\\
& \quad \texttt{true}\}\\
th_2 = \forall \texttt{k} : list[\mathbb{N}]\ & \texttt{if}\{\neg?\texttt{ø}(\texttt{k}),\\
& \quad \texttt{if}\{\neg?\texttt{0}(\texttt{hd}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad \texttt{if}\{\texttt{length}(\texttt{k}) > \texttt{length}(\texttt{pred}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\texttt{::}\texttt{tl}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad\quad \texttt{true},\\
& \quad\quad\quad \texttt{if}\{\texttt{length}(\texttt{k})\texttt{=}\texttt{length}(\texttt{pred}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\texttt{::}\texttt{tl}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad\quad\quad \texttt{hd}(\texttt{k}) > \texttt{hd}(\texttt{pred}(\texttt{hd}(\texttt{k}))\texttt{::}\texttt{tl}(\texttt{k})),\\
& \quad\quad\quad\quad \texttt{false}\}\},\\
& \quad\quad \texttt{true}\},\\
& \quad \texttt{true}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.3 (Terminierung und Maßterme)

Betrachten Sie die Prozedur

```
function gcd(x, y : ℕ) : ℕ <=
if x > y
  then gcd(y, x)
  else if ?0(x)
         then y
         else gcd(x, y - x)
       end_if
end_if
```

wobei „-“ die übliche Prozedur für die Subtraktion natürlicher Zahlen ist.

- Beweisen Sie, dass ein Maßterm, der als einzige Variable `x` enthält, nicht für einen Terminierungsbeweis ausreichen kann. Zeigen Sie also, dass eine der Terminierungshypothesen, die zu einem solchen Maßterm gebildet werden, widerlegt werden kann.
- Geben Sie eine geeignete Maßtermliste für die Terminierung an. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

- Sei `m` ein Maßterm, der als einzige Variable `x` enthält. Dann werden folgende Terminierungshypothesen erzeugt:

$$th_1 = \forall \texttt{x}, \texttt{y} : \mathbb{N}\ \texttt{if}\{\texttt{x} > \texttt{y}, \texttt{m} > \texttt{m}[\texttt{x}/\texttt{y}], \texttt{true}\}$$

$$th_2 = \forall \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\neg \mathtt{x} > \mathtt{y}, \mathtt{if}\{\neg ?\mathtt{0}(\mathtt{x}), \mathtt{m} > \mathtt{m}[\mathtt{x}/\mathtt{x}], \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}$$

Da $\mathtt{m[x/x]} = \mathtt{m}$ kann th_2 nicht bewiesen werden, denn für kein Maßterm $\mathtt{m}$ gilt $\mathtt{m} > \mathtt{m}$.

- Maßtermliste: $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$

  in th_1 : für $\mathtt{x} > \mathtt{y}$ folgt trivialerweise $\mathtt{x} > \mathtt{y}$

  in th_2 : $\mathtt{x} = \mathtt{x}$ und für $\mathtt{x} \leq \mathtt{y} \wedge \mathtt{x} \neq 0$ folgt $\mathtt{y} > \mathtt{y} - \mathtt{x}$