Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

Lösungsvorschlag zu Übung 3

Version 1 vom 02.12.2011

Aufgabe 3.1 (Matching)

Bestimmen Sie den jeweils minimalen Matcher für die folgenden Matchingprobleme, falls ein Matcher existiert. Geben Sie dazu jeweils eine Herleitung im Matchingkalkül an, aus der dieser Matcher hervorgeht. Existiert kein Matcher, dann geben Sie alle Herleitungen an. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Regel an.

(a) Pattern: $t_{(a)} = f(x, y)$, Target: $q_{(a)} = f(g(a), g(a))$

Lösungsvorschlag

Für $\sigma_{(a)} = \{x/g(a), y/g(a)\}$ ist $\sigma_{(a)}(t_{(a)}) = q_{(a)}$, denn

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\{f(x,y) \doteq f(g(a),g(a))\}, \emptyset)}{(\{x \doteq g(a), y \doteq g(a)\}, \emptyset)}\text{Decompose}}{(\{y \doteq g(a)\}, \{x/g(a)\})}\text{Solve}}{(\emptyset, \{x/g(a), y/g(a)\})}\text{Solve}$$

(b) Pattern: $t_{(b)} = f(x, x)$, Target: $q_{(b)} = f(g(a), g(b))$

Lösungsvorschlag

Es gibt keinen Matcher, denn keine Herleitung endet in $(\emptyset, \sigma)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\{f(x,x) \doteq f(g(a),g(b))\}, \emptyset)}{(\{x \doteq g(a), x \doteq g(b)\}, \emptyset)}\text{Decompose}}{(\{g(a) \doteq g(b)\}, \{x/g(a)\})}\text{Solve}}{(\{a \doteq b\}, \{x/g(a)\})}\text{Decompose}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\{f(x,x) \doteq f(g(a),g(b))\}, \emptyset)}{(\{x \doteq g(a), x \doteq g(b)\}, \emptyset)}\text{Decompose}}{(\{g(b) \doteq g(a)\}, \{x/g(b)\})}\text{Solve}}{(\{b \doteq a\}, \{x/g(b)\})}\text{Decompose}$$

(c) Pattern: $t_{(c)} = f(x, g(x))$, Target: $q_{(c)} = f(a, g(a))$

Lösungsvorschlag

Für $\sigma_{(c)} = \{x/a\}$ ist $\sigma_{(c)}(t_{(c)}) = q_{(c)}$, denn

$$\begin{array}{cl}
(\{f(x, g(x)) \doteq f(a, g(a))\}, \emptyset) & \\ \hline
(\{x \doteq a, g(x) \doteq g(a)\}, \emptyset) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{g(a) \doteq g(a)\}, \{x/a\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\emptyset, \{x/a\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

(d) Pattern: $t_{(d)} = h(x, y, f(x, y))$, Target: $q_{(d)} = h(f(a, b), c, f(f(a, b), c))$

Lösungsvorschlag

Für $\sigma_{(d)} = \{x/f(a, b), y/c\}$ ist $\sigma_{(d)}(t_{(d)}) = q_{(d)}$, denn

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x, y, f(x, y)) \doteq h(f(a, b), c, f(f(a, b), c))\}, \emptyset) & \\ \hline
(\{x \doteq f(a, b), y \doteq c, f(x, y) \doteq f(f(a, b), c)\}, \emptyset) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{y \doteq c, f(f(a, b), y) \doteq f(f(a, b), c)\}, \{x/f(a, b)\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{f(f(a, b), c) \doteq f(f(a, b), c)\}, \{x/f(a, b), y/c\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\emptyset, \{x/f(a, b), y/c\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

(e) Pattern: $t_{(e)} = h(x, y, f(x, y))$, Target: $q_{(e)} = h(b, c, f(g(b), c))$

Lösungsvorschlag

Es gibt keinen Matcher, denn keine Herleitung endet in $(\emptyset, \sigma)$.

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x, y, f(x, y)) \doteq h(b, c, f(g(b), c))\}, \emptyset) & \\ \hline
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x, y) \doteq f(g(b), c)\}, \emptyset) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{y \doteq c, f(b, y) \doteq f(g(b), c)\}, \{x/b\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{f(b, c) \doteq f(g(b), c)\}, \{x/b, y/c\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{b \doteq g(b), c \doteq c\}, \{x/b, y/c\}) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{b \doteq g(b)\}, \{x/b, y/c\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x, y, f(x, y)) \doteq h(b, c, f(g(b), c))\}, \emptyset) & \\ \hline
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x, y) \doteq f(g(b), c)\}, \emptyset) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{y \doteq c, f(b, y) \doteq f(g(b), c)\}, \{x/b\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{y \doteq c, b \doteq g(b)\}, \{x/b\}) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{b \doteq g(b)\}, \{x/b, y/c\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x, y, f(x, y)) \doteq h(b, c, f(g(b), c))\}, \emptyset) & \\ \hline
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x, y) \doteq f(g(b), c)\}, \emptyset) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{x \doteq b, f(x, c) \doteq f(g(b), c)\}, \{y/c\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{f(b, c) \doteq f(g(b), c)\}, \{y/c, x/b\}) & \text{Solve} \\ \hline
(\{b \doteq g(b), c \doteq c\}, \{y/c, x/b\}) & \text{Decompose} \\ \hline
(\{b \doteq g(b)\}, \{y/c, x/b\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, f(x,c) \doteq f(g(b),c)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b), c \doteq c\},\{y/c\}) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b)\},\{y/c\}) & \text{Eliminate} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b\},\{y/c, x/g(b)\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, f(x,c) \doteq f(g(b),c)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b), c \doteq c\},\{y/c\}) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b)\},\{y/c\}) & \text{Eliminate} \\ \cline{1-1}
(\{b \doteq g(b)\},\{y/c, x/b\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, f(x,c) \doteq f(g(b),c)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b), c \doteq c\},\{y/c\}) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b, c \doteq c\},\{y/c, x/g(b)\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b\},\{y/c, x/g(b)\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, f(x,c) \doteq f(g(b),c)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b), c \doteq c\},\{y/c\}) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{b \doteq g(b), c \doteq c\},\{y/c, x/b\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{b \doteq g(b)\},\{y/c, x/b\}) & \text{Eliminate}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, x \doteq g(b)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{y \doteq c, b \doteq g(b)\},\{x/b\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{b \doteq g(b)\},\{x/b, y/c\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, x \doteq g(b)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{b \doteq g(b)\},\{y/c, x/b\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, x \doteq g(b)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, x \doteq g(b)\},\{y/c\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b\},\{y/c, x/g(b)\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
(\{h(x,y,f(x,y)) \doteq h(b,c,f(g(b),c))\},\emptyset) & \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, f(x,y) \doteq f(g(b),c)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{x \doteq b, y \doteq c, x \doteq g(b)\},\emptyset) & \text{Decompose} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b, y \doteq c\},\{x/g(b)\}) & \text{Solve} \\ \cline{1-1}
(\{g(b) \doteq b\},\{x/g(b), y/c\}) & \text{Solve}
\end{array}$$

Aufgabe 3.2 (Berechnungskalkül)

Betrachten Sie das Programm P mit folgenden Prozedurdefinitionen:

```
function plus(x, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(y)
  then x
  else +(plus(x, -(y)))
end_if

function times(x, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(y)
  then 0
  else plus(x, times(x, -(y)))
end_if
```

Bestimmen Sie die folgenden Werte. Geben Sie dazu jeweils eine Herleitung im Berechnungskalkül an. Geben Sie dabei in jedem Schritt die verwendeten Regeln an.

(a) $eval_P(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}({}^{+}(0))))$

Lösungsvorschlag

$$\begin{array}{cl}
\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}({}^{+}(0))) & \\ \cline{1-1}
\mathtt{if}\{\mathtt{?0}({}^{+}({}^{+}(0))),{}^{+}({}^{+}(0)),{}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}({}^{+}(0)))))\} & (19) \\ \cline{1-1}
\mathtt{if}\{\mathtt{false},{}^{+}({}^{+}(0)),{}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}({}^{+}(0)))))\} & (8),(4) \\ \cline{1-1}
{}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}({}^{+}(0))))) & (10) \\ \cline{1-1}
{}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(0))) & (18),(18),(5) \\ \cline{1-1}
{}^{+}(\mathtt{if}\{\mathtt{?0}({}^{+}(0)),\ {}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}(0))))\}) & (18),(19) \\ \cline{1-1}
{}^{+}(\mathtt{if}\{\mathtt{false},\ {}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}(0))))\}) & (18),(8),(4) \\ \cline{1-1}
{}^{+}({}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}({}^{+}(0))))) & (18),(10) \\ \cline{1-1}
{}^{+}({}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ 0))) & (18),(18),(18),(5) \\ \cline{1-1}
{}^{+}({}^{+}(\mathtt{if}\{\mathtt{?0}(0),\ {}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}(0)))\})) & (18),(18),(19) \\ \cline{1-1}
{}^{+}({}^{+}(\mathtt{if}\{\mathtt{true},\ {}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(\mathtt{plus}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{-}(0)))\})) & (18),(18),(8),(3) \\ \cline{1-1}
{}^{+}({}^{+}({}^{+}({}^{+}(0)))) & (18),(18),(9)
\end{array}$$

(b) $eval_P(\mathtt{times}({}^{+}({}^{+}(0)),\ {}^{+}(0)))$

Lösungsvorschlag

$$
\begin{array}{cl}
\mathtt{times(^{+}(^{+}(0),\ ^{+}(0)))} & \\ \hline
\mathtt{if\{?0(^{+}(0)),\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(^{+}(0))))\}} & (19) \\ \hline
\mathtt{if\{false,\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(^{+}(0))))\}} & (8),(4) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(^{+}(0))))} & (10) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0)),\ 0))} & (18),(18),(5) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ if\{?0(0),\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(0))\})} & (18),(19) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ if\{true,\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(0))\})} & (18),(8),(3) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ 0)} & (18),(9) \\ \hline
\mathtt{if\{?0(0),\ ^{+}(^{+}(0)),\ ^{+}(plus(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(0)))\}} & (19) \\ \hline
\mathtt{if\{true,\ ^{+}(^{+}(0)),\ ^{+}(plus(^{+}(^{+}(0)),\ ^{-}(0)))\}} & (8),(3) \\ \hline
\mathtt{^{+}(^{+}(0))} & (9)
\end{array}
$$

(c) $eval_P(\mathtt{times(^{+}(^{+}(0)),\ ^{+}(^{+}(0)))})$

Lösungsvorschlag

$$
\begin{array}{cl}
\mathtt{times(^{+}(^{+}(0)),\ ^{+}(^{+}(0)))} & \\ \hline
\mathtt{if\{?0(^{+}(^{+}(0))),\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0),\ ^{-}(^{+}(^{+}(0))))))\}} & (19) \\ \hline
\mathtt{if\{false,\ 0,\ plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0),\ ^{-}(^{+}(^{+}(0))))))\}} & (8),(4) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0),\ ^{-}(^{+}(^{+}(0))))))} & (10) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ times(^{+}(^{+}(0),\ ^{+}(0))))} & (18),(18),(5) \\ \hline
\mathtt{plus(^{+}(^{+}(0)),\ ^{+}(^{+}(0)))} & (18),\ \text{Aufgabenteil (b)} \\ \hline
\mathtt{^{+}(^{+}(^{+}(^{+}(0))))} & \text{Aufgabenteil (a)}
\end{array}
$$

Aufgabe 3.3 (Partiell Definierte Prozeduren)

Geben Sie Prozeduren zur Berechnung der folgenden Funktionen an. Geben Sie zu diesen Prozeduren jeweils die Exception Guard an.

(a)

$$
half(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{, falls } x \text{ gerade} \\ \text{unbestimmt} & \text{, sonst} \end{cases}
$$

Lösungsvorschlag

```
function half(x : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x)
  then 0
  else if ?0(⁻(x))
         then ⋆
         else ⁺(half(⁻(⁻(x))))
       end_if
end_if
```

$except_{\mathtt{half}}[x] = \mathtt{if\{?0(x),\ false,\ ?0(^{-}(x))\}}$

(b)

$$even(x) = \begin{cases} true & \text{, falls x gerade} \\ false & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

```
function even(x : ℕ) : bool <=
if ?0(x)
  then true
  else if ?0(⁻(x))
         then false
         else even(⁻(⁻(x)))
       end_if
end_if
```

$except_{\texttt{even}}[x] = \texttt{false}$

(c)

$$average(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} & \text{, falls } x + y \text{ gerade} \\ \text{unbestimmt} & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

```
function average(x, y : ℕ) : ℕ <=
half(x + y)
```

$except_{\texttt{average}}[x, y] = \texttt{false}$

Alternative:

```
function average(x, y : ℕ) : ℕ <=
let sum := x + y in
  if even(sum)
    then half(sum)
    else ⋆
  end_if
end_let
```

$except_{\texttt{average}}[x, y] = \neg\ \texttt{even(x + y)}$

Aufgabe 3.4 (Normalisierung)

Beweisen Sie folgende Aussage: Für jedes Programm P und alle Grundterme $\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e} \in \mathcal{G}(P)$ mit $eval_P(\texttt{a}) \in \mathcal{C}(P)$ gibt es einen Grundterm $\texttt{t} \in \mathcal{G}(P)$, so dass

$\texttt{if\{if\{a,b,c\},d,e\}} \Rightarrow_P^* \texttt{t}$ und $\texttt{if\{a,if\{b,d,e\},if\{c,d,e\}\}} \Rightarrow_P^* \texttt{t}$.

Lösungsvorschlag

Seien $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e} \in \mathcal{G}(P)$ beliebig. Wegen $eval_P(\mathtt{a}) \in \mathcal{C}(P)$ sind nur zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall $\mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{true}$**:** Dann gibt es folgende Herleitungen:

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{if\{if\{a,b,c\},d,e\}}}{\mathtt{if\{if\{true,b,c\},d,e\}}}\ (8),(8),\text{Voraussetzung } \mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{true}}{\mathtt{if\{b,d,e\}}}\ (8),(9)$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{if\{a,if\{b,d,e\},if\{c,d,e\}\}}}{\mathtt{if\{true,if\{b,d,e\},if\{c,d,e\}\}}}\ (8),\text{Voraussetzung } \mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{true}}{\mathtt{if\{b,d,e\}}}\ (9)$$

Also gilt mit $\mathtt{t} = \mathtt{if\{b,d,e\}}$ die Behauptung.

Fall $\mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{false}$**:** Dann gibt es folgende Herleitungen:

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{if\{if\{a,b,c\},d,e\}}}{\mathtt{if\{if\{false,b,c\},d,e\}}}\ (8),(8),\text{Voraussetzung } \mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{false}}{\mathtt{if\{c,d,e\}}}\ (8),(10)$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{if\{a,if\{b,d,e\},if\{c,d,e\}\}}}{\mathtt{if\{false,if\{b,d,e\},if\{c,d,e\}\}}}\ (8),\text{Voraussetzung } \mathtt{a} \Rightarrow_P^* \mathtt{false}}{\mathtt{if\{c,d,e\}}}\ (10)$$

Also gilt mit $\mathtt{t} = \mathtt{if\{c,d,e\}}$ die Behauptung.