Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

Lösungsvorschlag zu Hausübung 4 - Teil 1

Aufgabe 4.1 (Terminierung) (10 Punkte)

Beweisen Sie die Terminierung der Prozedur `h4.1` aus dem nachfolgenden $\mathcal{L}$-Programm ($\mathbb{N}$, `bool` und `>` sind wie im ✓`eriFun`-System definiert). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie geeignete Maßterme für den Terminierungsbeweis. Überlegen Sie sich dazu, was bei den rekursiven Aufrufen kleiner wird. Für die in den Maßtermen verwendete Hilfsprozeduren geben Sie deren Definitionen an oder verweisen Sie auf deren Definitionen im Vorlesungskript oder bisherigen Übungen.

(b) Geben Sie die zusammengesetzte Relationenbeschreibung der Prozedur an.

(c) Geben Sie die aus Maßtermen und Relationenbeschreibung gebildeten Terminierungshypothesen an.

(d) Normalisieren Sie die Terminierungshypothesen gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung und vereinfachen Sie diese.

(e) Belegen Sie die Gültigkeit der Terminierungshypothesen durch Anwendung bekannter arithmetischer Gleichungen.

```
structure list[@I] <=
  ø,
  [infixr,1] ::(hd : @I, tl : list[@I])

function h4.1(k : list[ℕ]) : list[ℕ] <=
if ?ø(k)
  then k
  else if ?ø(tl(k))
         then k
         else if hd(k) > hd(tl(k))
                then h4.1(hd(k) :: ⁺(hd(tl(k))) :: tl(tl(k)))
                else tl(k)
              end_if
       end_if
end_if
```

Lösungsvorschlag

(a) Als Maßterm wählen wir die Differenz zwischen den beiden ersten Listenelementen $\mathtt{hd}(k) - \mathtt{hd}(\mathtt{tl}(k))$.

(b)

$$
\begin{aligned}
R_{\mathtt{h4.1}} = \big\{ & \big\langle \{?\text{ø}(k)\}, \emptyset \big\rangle, \big\langle \{\neg ?\text{ø}(k), ?\text{ø}(\mathtt{tl}(k))\}, \emptyset \big\rangle, \\
& \big\langle \{\neg ?\text{ø}(k), \neg ?\text{ø}(\mathtt{tl}(k)), \mathtt{hd}(k) > \mathtt{hd}(\mathtt{tl}(k))\}, \{\{k/\mathtt{hd}(k) :: {}^{+}(\mathtt{hd}(\mathtt{tl}(k))) :: \mathtt{tl}(\mathtt{tl}(k))\}\} \big\rangle, \\
& \big\langle \{\neg ?\text{ø}(k), \neg ?\text{ø}(\mathtt{tl}(k)), \neg \mathtt{hd}(k) > \mathtt{hd}(\mathtt{tl}(k))\}, \emptyset \big\rangle \big\}
\end{aligned}
$$

(c)

$$th_1 = \forall k : \texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}\ \texttt{if}\{\texttt{if}\{\texttt{if}\{\neg?\emptyset(k), \neg?\emptyset(\texttt{tl}(k)), \texttt{false}\}, \texttt{hd}(k) > \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)), \texttt{false}\},$$
$$\texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) >$$
$$\texttt{hd}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k)))$$
$$- \texttt{hd}(\texttt{tl}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k)))), \texttt{true}\}$$

(d)

$$th_1 = \forall k : \texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}\ \texttt{if}\{?\emptyset(k), \texttt{true}, \texttt{if}\{?\emptyset(\texttt{tl}(k)), \texttt{true}, \texttt{if}\{\texttt{hd}(k) > \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)),$$
$$\texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) >$$
$$\texttt{hd}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k)))$$
$$- \texttt{hd}(\texttt{tl}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k)))), \texttt{true}\}\}\}$$

(e) Zu zeigen ist also, dass für eine Liste k mit mindestens zwei Elementen und $\texttt{hd}(k) > \texttt{hd}(\texttt{tl}(k))$ gilt:

$$\texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) > \texttt{hd}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k))) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(\texttt{hd}(k) :: {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))) :: \texttt{tl}(\texttt{tl}(k))))$$

Dies läßt sich vereinfachen zu:

$$\texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) > \texttt{hd}(k) - {}^{+}(\texttt{hd}(\texttt{tl}(k))), \text{ also } \texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) > \texttt{hd}(k) - \texttt{hd}(\texttt{tl}(k)) - 1$$

Dies gilt mit $\texttt{hd}(k) > \texttt{hd}(\texttt{tl}(k))$ offensichtlich.

Aufgabe 4.2 (Terminierung) (10 Punkte)

Beweisen Sie die Terminierung der Prozedur `h4.2` aus dem nachfolgenden $\mathcal{L}$-Programm ($\mathbb{N}$, `bool` und `>` sind wie im ✓`eriFun`-System definiert). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie geeignete Maßterme für den Terminierungsbeweis. Überlegen Sie sich dazu, was bei den rekursiven Aufrufen kleiner wird. Für die in den Maßtermen verwendete Hilfsprozeduren geben Sie deren Definitionen an oder verweisen Sie auf deren Definitionen im Vorlesungskript oder bisherigen Übungen.

(b) Geben Sie die zusammengesetzte Relationenbeschreibung der Prozedur an.

(c) Bilden Sie aus den Maßtermen und der Relationenbeschreibung normalisierte und vereinfachte Terminierungshypothesen.

(d) Belegen Sie die Gültigkeit der Terminierungshypothesen durch Anwendung bekannter arithmetischer Gleichungen.

```
function h4.2(x, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(y)
  then x
  else if y > x
         then h4.2(y, x)
         else h4.2(⁻(y), ⁺(x))
       end_if
end_if
```

Lösungsvorschlag

(a) Wir wählen die Maßtermliste: `min(x,y)`, `y`. Dabei sei `min` eine Prozedur, die das Minimum zweier natürlicher Zahlen berechnet.

(b)

$$\begin{aligned}R_{\mathtt{h4.2}} = \{&\langle\{?\mathtt{0}(\mathtt{y})\}, \emptyset\rangle,\\ &\langle\{\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y}), \mathtt{y} > \mathtt{x}\}, \{\{\mathtt{x}/\mathtt{y}, \mathtt{y}/\mathtt{x}\}\}\rangle,\\ &\langle\{\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y}), \neg\mathtt{y} > \mathtt{x}\}, \{\{\mathtt{x}/^{-}(\mathtt{y}), \mathtt{y}/^{+}(\mathtt{x})\}\}\rangle\}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}th_1 = \forall x, y : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y}), \mathtt{if}\{\mathtt{y} > \mathtt{x}, \mathtt{if}\{&\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) > \mathtt{min}(\mathtt{y},\mathtt{x}),\\ &\mathtt{true},\\ &\mathtt{if}\{\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathtt{min}(\mathtt{y},\mathtt{x}), \mathtt{y} > \mathtt{x}, \mathtt{false}\}\}, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}th_2 = \forall x, y : \mathbb{N}\ \mathtt{if}\{\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y}), \mathtt{if}\{\neg\mathtt{y} > \mathtt{x}, \mathtt{if}\{&\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) > \mathtt{min}(\mathtt{pred}(\mathtt{y}), \mathtt{succ}(\mathtt{x})),\\ &\mathtt{true},\\ &\mathtt{if}\{\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathtt{min}(\mathtt{pred}(\mathtt{y}), \mathtt{succ}(\mathtt{x})),\\ &\quad \mathtt{y} > \mathtt{succ}(\mathtt{x}),\\ &\quad \mathtt{false}\}\}, \mathtt{true}\}, \mathtt{true}\}\end{aligned}$$

(d) Wie bekannt ist `min` kommutativ, also gilt $\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathtt{min}(\mathtt{y},\mathtt{x})$ und damit nicht $\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) > \mathtt{min}(\mathtt{y},\mathtt{x})$. Zu zeigen bleibt bei th_1 also `y > x`, was jedoch nach Voraussetzung schon gilt.

Für den Beweis von th_2 reicht der Beweis von $\mathtt{min}(\mathtt{x},\mathtt{y}) > \mathtt{min}(^{-}(\mathtt{y}), ^{+}(\mathtt{x}))$ unter den Annahmen $\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y})$ und $\neg\mathtt{y} > \mathtt{x}$ aus. Wegen $\neg\mathtt{y} > \mathtt{x}$ ist $\mathtt{min(x,\ y)} = y$.

Außerdem ist damit $^{-}\mathtt{(y)} < \mathtt{x} < {}^{+}\mathtt{(x)}$, also $\mathtt{min(}^{-}\mathtt{(y),}\ ^{+}\mathtt{(x))} = {}^{-}\mathtt{(y)}$. Offensichtlich gilt mit $\neg?\mathtt{0}(\mathtt{y})$ dann $y > {}^{-}(y)$.