# Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

## Lösungsvorschlag zu Hausübung 3

---

**Version 2 vom 17.01.2012**

Geben Sie die handschriftliche Lösung für diese Übung **am 10. Januar 2012 vor oder nach der Vorlesung** von 16:15 bis 17:55 in S2|02/C205 ab. Heften Sie Ihre Blätter **oben links** zusammen und versehen Sie alle Blätter **gut lesbar** mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern sowie dem Namen Ihres Tutors. Es können **maximal vier** Übungsteilnehmer eine gemeinsam erarbeitete Lösung einreichen.

Lesen Sie vor dem Anfertigen einer Lösung die Aufgaben gründlich durch. Verwenden Sie Definitionen und Notationen wie im Rahmen dieser Veranstaltung vorgestellt. Für Fragen bezüglich dieser Übung können Sie das Forum zur Veranstaltung sowie die Sprechstunden der Tutoren nutzen.

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Zu diesen gehört auch die strikte Verfolgung von Plagiarismus. Mit der Abgabe einer Lösung bestätigen Sie, dass Sie die alleinigem Autoren des gesamten Materials sind. Bei Unklarheiten zu diesem Thema finden Sie weiterführende Informationen unter `http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarism` oder sprechen Sie Ihren Betreuer an.

## Aufgabe 3.1 (Minimale Elemente und Vorgänger) (6 Punkte)

In der Vorlesung wurden für *fundierte* Mengen $(M, \succ)$ die Menge $min_\succ(M)$ der minimalen Elemente und die Menge $pre_\succ(m)$ der Vorgänger eines Elementes $m \in M$ definiert. Die gleichen Definitionen kann man auch auf beliebige Mengen $(M, \succ)$ anwenden. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen $(M, \succ)$ die minimalen Elemente $min_\succ(M)$. Geben Sie außerdem für jedes Element $m \in M$ die Anzahl der Vorgänger $|pre_\succ(m)|$ an.

(a) $(\mathbb{N}, \succ_{1a})$ mit $m \succ_{1a} n$ genau dann, wenn $m = (n \; mod \; 17)$.

### Lösungsvorschlag

$min_{\succ_{1a}}(M) = \mathbb{N}_{17^+}$, mit $\mathbb{N}_{17^+} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$

$$|pre_{\succ_{1a}}(m)| = \begin{cases} 0 & \text{, falls } m \in \mathbb{N}_{17^+} \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases}$$

(b) $(\mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}, \succ_{1b})$ mit $k \succ_{1b} l$ genau dann, wenn $k = |l| :: l$. Dabei ist $|l|$ die Länge der Liste $l$.

### Lösungsvorschlag

$min_{\succ_{1b}}(M) = \{k \in \mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}} \mid k = \varnothing \vee (k = n :: k' \wedge n \neq |k'|)\}$

$$|pre_{\succ_{1b}}(m)| = \begin{cases} 0 & \text{, falls } m \in min_{\succ_{1b}}(M) \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(c) $(\mathbb{R}, \succ_{1c})$ mit $x \succ_{1c} y$ genau dann, wenn $x \neq y$ und $2y = x$.

### Lösungsvorschlag

$min_{\succ_{1c}}(M) = 0$

$$|pre_{\succ_{1c}}(m)| = \begin{cases} 0 & \text{, falls } m \in min_{\succ_{1c}}(M) \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

## Aufgabe 3.2 (Relationen) (6 Punkte)

(a) Geben Sie für die durch die Relationenbeschreibung

$$\begin{aligned} R_{h3.2a} := \{&\langle\{?0(x)\}, \{\{x/^{+}(x)\}\}\rangle, \\ &\langle\{\neg?0(x), ?0(^{-}(x))\}, \emptyset\rangle, \\ &\langle\{\neg?0(x), \neg?0(^{-}(x))\}, \{\{x/^{-}(x)\}, \{x/^{-}(^{-}(x))\}\}\rangle\} \end{aligned}$$

definierte Relation $>_{R_{h3.2a},x}$ (kurz $\succ_{2a}$) die Mengen $pre_{\succ_{2a}}(0)$ und $pre_{\succ_{2a}}(p)$, für alle $p \in pre_{\succ_{2a}}(3)$, an.

### Lösungsvorschlag

$pre_{\succ_{2a}}(0) = \{1\}$
$pre_{\succ_{2a}}(3) = \{2, 1\}$
$pre_{\succ_{2a}}(2) = \{1, 0\}$
$pre_{\succ_{2a}}(1) = \emptyset$

(b) Geben Sie für die durch die Relationenbeschreibung

$$\begin{aligned} R_{h3.2b} := \{&\langle\{?0(x)\}, \{\{x/^{+}(x), y/y\}\}\rangle, \\ &\langle\{\neg?0(x), ?0(y)\}, \emptyset\rangle, \\ &\langle\{\neg?0(x), \neg?0(y)\}, \{\{x/^{-}(x), y/^{-}(y)\}\}\rangle\} \end{aligned}$$

definierte Relation $>_{R_{h3.2b},xy}$ (kurz $\succ_{2b}$) alle mit $(3, 5)$ startenden $\succ_{2b}$-Ketten an.

### Lösungsvorschlag

$(3, 5) \succ_{2b} (2, 4) \succ_{2b} (1, 3) \succ_{2b} (0, 2) \succ_{2b} (1, 2) \succ_{2b} (0, 1) \succ_{2b} (1, 1) \succ_{2b} (0, 0) \succ_{2b} (1, 0)$

## Aufgabe 3.3 (Fundierte Mengen) (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die Fundiertheit folgender Mengen:

(a) $(\mathcal{C}_{\mathtt{list}[\mathbb{N}]}, \succ_{3a})$ mit $k \succ_{3a} l$ genau dann, wenn $\sum k > \sum l$. Dabei ist $\sum k$ die Summe der Elemente in $k$.

### Lösungsvorschlag

Angenommen, $(\mathcal{C}_{\mathtt{list}[\mathbb{N}]}, \succ_{3a})$ sei nicht fundiert, dann gibt es eine unendliche Folge $\langle k_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ mit $k_i \succ_{3a} k_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei $l = \sum k_0$, dann ist $l - i > \sum k_{i+1}$ wegen $k_i \succ_{3a} k_{i+1}$. Für $i := l$ ist damit $0 > \sum k_{l+1}$, im Widerspruch zur Minimalität von 0 in $(\mathbb{N}, >)$, also muss die Annahme falsch gewesen sein: Es gibt keine solche unendliche Folge und $(\mathcal{C}_{\mathtt{list}[\mathbb{N}]}, \succ_{3a})$ ist fundiert.

(b) $(M, \succ_{3b1} \cap \succ_{3b2})$, wenn $(M, \succ_{3b1})$ und $(M, \succ_{3b2})$ fundierte Mengen sind.

### Lösungsvorschlag

Da jede Kette in $\succ_{3b1} \cap \succ_{3b2}$ auch eine Kette in $\succ_{3b1}$ (und $\succ_{3b2}$) ist, kann es keine unendliche Kette geben, da $\succ_{3b1}$ (und $\succ_{3b2}$) damit nicht fundiert wäre(n).

(c) $(M, \succ_{3c1} \cup \succ_{3c2})$, wenn $(M, \succ_{3c1})$ und $(M, \succ_{3c2})$ fundierte Mengen sind.

### Lösungsvorschlag

Sei $M = \{0,1\}$, $\succ_{3c1} = \{(0,1)\}$ und $\succ_{3c2} = \{(1,0)\}$, dann sind offenbar sowohl $(M, \succ_{3c1})$ als auch $(M, \succ_{3c2})$ fundiert. Aber $(M, \succ_{3c3})$ mit $\succ_{3c3} = \succ_{3c1} \cup \succ_{3c2} = \{(0,1),(1,0)\}$ ist nicht fundiert, denn es gibt die unendlich absteigende Kette $0 \succ_{3c3} 1 \succ_{3c3} 0 \succ_{3c3} \dots$

(d) $(M, M^2 \setminus \succ_{3d})$, wenn $(M, \succ_{3d})$ eine nicht fundierte Menge ist.

### Lösungsvorschlag

Die Menge $(\{0,1\}, \{(0,0)\})$ ist nicht fundiert, aber auch $(\{0,1\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\})$ ist nicht fundiert.

(e) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \succ_{3e})$ mit $(x_1, x_2) \succ_{3e} (y_1, y_2)$ genau dann, wenn $y_1 > x_1$, $x_2 > y_1$ und $x_2 + 1 > y_2$.

### Lösungsvorschlag

Sei $\langle (n_i, m_i) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Kette mit $(n_i, m_i) \succ_{3e} (n_{i+1}, m_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit $n_{i+1} > n_i$ und $m_i > n_{i+1}$ folgt $m_i > n_i$. Wegen $m_i + 1 > m_{i+1}$, also $m_i \geq m_{i+1}$ ist auch $m_0 \geq m_i > n_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit kann jedoch keine unendliche Kette existieren, da es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m_0 > n$ gibt.

## Aufgabe 3.4 (Strukturelle Ordnung) (5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Datentypen `struc` jeweils die Relationenbeschreibung $R_{\texttt{struc}}$ an.

(a)
```
structure NODE[@A] <=
  null,
  node_two(left2 : NODE[@A], key : @A, right2 : NODE[@A]),
  node_three(left3 : NODE[@A], key1 : @A, middle : NODE[@A], key2 : @A,
             right3 : NODE[@A])
```

### Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} R_{\texttt{NODE[@A]}} = \{ &\langle \{?\texttt{null(u)}\}, \emptyset \rangle, \\ &\langle \{?\texttt{node\_two(u)}\}, \{\{\texttt{u/left2(u)}\}, \{\texttt{u/right2(u)}\}\} \rangle, \\ &\langle \{?\texttt{node\_three(u)}\}, \{\{\texttt{u/left3(u)}\}, \{\texttt{u/middle(u)}\}, \{\texttt{u/right3(u)}\}\} \rangle \} \end{aligned}$$

(b)
```
structure BTREE[@A] <=
  btree(root : NODE[@A])
```

### Lösungsvorschlag

$$R_{\texttt{BTREE[@A]}} = \{ \langle \{?\texttt{btree(u)}\}, \emptyset \rangle \}$$

## Aufgabe 3.5 (Rekursion und Induktion) (13 Punkte)

Betrachten Sie die unten angegebenen Prozeduren `p`:

- Geben Sie die Rekursionsordnungen der Prozeduren `p` in Form der Relationenbeschreibungen $R_{\texttt{p}}$ an.
- Geben Sie die Induktionsaxiome $IndAx_{\texttt{p(n)=n}, R_{\texttt{p}}}$ an.

(a)
```
function 5a(n : ℕ) : ℕ <=
n
```

**Lösungsvorschlag**

$$R_{\texttt{5a}} = \{\langle\{\texttt{true}\}, \emptyset\rangle\}$$

$$\begin{aligned}IndAx_{\texttt{5a(n)=n},R_{\texttt{5a}}} &= \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \texttt{true} \Rightarrow \texttt{5a(n) = n}\\ &\Rightarrow \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \texttt{5a(n) = n}\end{aligned}$$

(b)
```
function 5b(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else succ(5b(pred(n)))
end_if
```

**Lösungsvorschlag**

$$\begin{aligned}R_{\texttt{5b}} = \{&\langle\{?\texttt{0(n)}\}, \emptyset\rangle,\\ &\langle\{\neg ?\texttt{0(n)}\}, \{\{\texttt{n/pred(n)}\}\}\rangle\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IndAx_{\texttt{5b(n)=n},R_{\texttt{5b}}} =&\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ ?\texttt{0(n)} \Rightarrow \texttt{5b(n) = n}\\ &\wedge \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \neg ?\texttt{0(n)} \wedge \texttt{5b(pred(n)) = pred(n)} \Rightarrow \texttt{5b(n) = n}\\ &\Rightarrow \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \texttt{5b(n) = n}\end{aligned}$$

(c)
```
function 5c(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else pred(5b(succ(n)))
end_if
```

**Lösungsvorschlag**

$$\begin{aligned}R_{\texttt{5c}} = \{&\langle\{?\texttt{0(n)}\}, \emptyset\rangle,\\ &\langle\{\neg ?\texttt{0(n)}\}, \emptyset\rangle\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IndAx_{\texttt{5c(n)=n},R_{\texttt{5c}}} =&\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ ?\texttt{0(n)} \Rightarrow \texttt{5c(n) = n}\\ &\wedge \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \neg ?\texttt{0(n)} \Rightarrow \texttt{5c(n) = n}\\ &\Rightarrow \forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \texttt{5c(n) = n}\end{aligned}$$

(d)
```
function 5d(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else if ?0(pred(n))
         then ⋆
         else 5d(pred(n))
       end_if
end_if
```

## Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}R_{\texttt{5d}} = \{&\langle\{?\texttt{0}(\texttt{n})\}, \emptyset\rangle,\\ &\langle\{\neg?\texttt{0}(\texttt{n}), ?\texttt{0}(\texttt{pred}(\texttt{n}))\}, \emptyset\rangle,\\ &\langle\{\neg?\texttt{0}(\texttt{n}), \neg?\texttt{0}(\texttt{pred}(\texttt{n}))\}, \{\{\texttt{n}/\texttt{pred}(\texttt{n})\}\}\rangle\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IndAx_{\texttt{5d(n)}=\texttt{n},R_{\texttt{5d}}} =&\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ ?\texttt{0}(\texttt{n}) \Rightarrow \texttt{5d(n) = n}\\ &\wedge\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \neg?\texttt{0}(\texttt{n}) \wedge ?\texttt{0}(\texttt{pred}(\texttt{n})) \Rightarrow \texttt{5d(n) = n}\\ &\wedge\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \neg?\texttt{0}(\texttt{n}) \wedge \neg?\texttt{0}(\texttt{pred}(\texttt{n})) \wedge \texttt{5d(pred(n)) = pred(n)} \Rightarrow \texttt{5d(n) = n}\\ &\Rightarrow\forall \texttt{n} : \mathbb{N}\ \texttt{5d(n) = n}\end{aligned}$$