Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Visar Januzaj, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2011/12

Hausübung 3

Version 2 vom 17.01.2012

Aufgabe 3.1 (Minimale Elemente und Vorgänger) (6 Punkte)

In der Vorlesung wurden für *fundierte* Mengen $(M, \succ)$ die Menge $min_{\succ}(M)$ der minimalen Elemente und die Menge $pre_{\succ}(m)$ der Vorgänger eines Elementes $m \in M$ definiert. Die gleichen Definitionen kann man auch auf beliebige Mengen $(M, \succ)$ anwenden. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen $(M, \succ)$ die minimalen Elemente $min_{\succ}(M)$. Geben Sie außerdem für jedes Element $m \in M$ die Anzahl der Vorgänger $|pre_{\succ}(m)|$ an.

(a) $(\mathbb{N}, \succ_{1a})$ mit $m \succ_{1a} n$ genau dann, wenn $m = (n \ mod\ 17)$.

(b) $(\mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}, \succ_{1b})$ mit $k \succ_{1b} l$ genau dann, wenn $k = |l| :: l$. Dabei ist $|l|$ die Länge der Liste l.

(c) $(\mathbb{R}, \succ_{1c})$ mit $x \succ_{1c} y$ genau dann, wenn $x \neq y$ und $2y = x$.

Aufgabe 3.2 (Relationen) (6 Punkte)

(a) Geben Sie für die durch die Relationenbeschreibung

$$\begin{aligned} R_{h3.2a} := \{ & \langle \{?0(x)\}, \{\{x/^{+}(x)\}\} \rangle, \\ & \langle \{\neg ?0(x), ?0(^{-}(x))\}, \emptyset \rangle, \\ & \langle \{\neg ?0(x), \neg ?0(^{-}(x))\}, \{\{x/^{-}(x)\}, \{x/^{-}(^{-}(x))\}\} \rangle \} \end{aligned}$$

definierte Relation $>_{R_{h3.2a},x}$ (kurz $\succ_{2a}$) die Mengen $pre_{\succ_{2a}}(0)$ und $pre_{\succ_{2a}}(p)$, für alle $p \in pre_{\succ_{2a}}(3)$, an.

(b) Geben Sie für die durch die Relationenbeschreibung

$$\begin{aligned} R_{h3.2b} := \{ & \langle \{?0(x)\}, \{\{x/^{+}(x), y/y\}\} \rangle, \\ & \langle \{\neg ?0(x), ?0(y)\}, \emptyset \rangle, \\ & \langle \{\neg ?0(x), \neg ?0(y)\}, \{\{x/^{-}(x), y/^{-}(y)\}\} \rangle \} \end{aligned}$$

definierte Relation $>_{R_{h3.2b},xy}$ (kurz $\succ_{2b}$) alle mit $(3, 5)$ startenden $\succ_{2b}$-Ketten an.

Aufgabe 3.3 (Fundierte Mengen) (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die Fundiertheit folgender Mengen:

(a) $(\mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}, \succ_{3a})$ mit $k \succ_{3a} l$ genau dann, wenn $\sum k > \sum l$. Dabei ist $\sum k$ die Summe der Elemente in k.

(b) $(M, \succ_{3b1} \cap \succ_{3b2})$, wenn $(M, \succ_{3b1})$ und $(M, \succ_{3b2})$ fundierte Mengen sind.

(c) $(M, \succ_{3c1} \cup \succ_{3c2})$, wenn $(M, \succ_{3c1})$ und $(M, \succ_{3c2})$ fundierte Mengen sind.

(d) $(M, M^2 \setminus \succ_{3d})$, wenn $(M, \succ_{3d})$ eine nicht fundierte Menge ist.

(e) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \succ_{3e})$ mit $(x_1, x_2) \succ_{3e} (y_1, y_2)$ genau dann, wenn $y_1 > x_1$, $x_2 > y_1$ und $x_2 + 1 > y_2$.

Aufgabe 3.4 (Strukturelle Ordnung) (5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Datentypen `struc` jeweils die Relationenbeschreibung $R_{\texttt{struc}}$ an.

(a)
```
structure NODE[@A] <=
  null,
  node_two(left2 : NODE[@A], key : @A, right2 : NODE[@A]),
  node_three(left3 : NODE[@A], key1 : @A, middle : NODE[@A], key2 : @A,
             right3 : NODE[@A])
```

(b)
```
structure BTREE[@A] <=
  btree(root : NODE[@A])
```

Aufgabe 3.5 (Rekursion und Induktion) (13 Punkte)

Betrachten Sie die unten angegebenen Prozeduren `p`:

- Geben Sie die Rekursionsordnungen der Prozeduren `p` in Form der Relationenbeschreibungen $R_{\texttt{p}}$ an.
- Geben Sie die Induktionsaxiome $\mathit{IndAx}_{\texttt{p(n)=n},R_{\texttt{p}}}$ an.

(a)
```
function 5a(n : ℕ) : ℕ <=
n
```

(b)
```
function 5b(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else succ(5b(pred(n)))
end_if
```

(c)
```
function 5c(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else pred(5b(succ(n)))
end_if
```

(d)
```
function 5d(n : ℕ) : ℕ <=
if ?0(n)
  then 0
  else if ?0(pred(n))
         then ⋆
         else 5d(pred(n))
       end_if
end_if
```