Formale Grundlagen der Informatik 3

Prof. Dr. Christoph Walther / Simon Siegler, Nathan Wasser
Technische Universität Darmstadt — Wintersemester 2009/10

Lösungsvorschlag zu Hausübung 3

Aufgabe 3.1 (Minimale Elemente und Vorgänger) (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden für *fundierte* Mengen $(M, \succ)$ die Menge $min_{\succ}(M)$ der minimalen Elemente und die Menge $pre_{\succ}(m)$ der Vorgänger eines Elmentes $m \in M$ definiert. Die gleichen Definitionen kann man auch auf beliebige Mengen $(M, \succ)$ anwenden. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen $(M, \succ)$ die minimalen Elemente $min_{\succ}(M)$. Geben Sie außerdem für jedes nicht-minimale Element $m \in M \setminus min_{\succ}(M)$ die Anzahl der Vorgänger $|pre_{\succ}(m)|$ an.

(a) $(\mathbb{N}, \succ_a)$ mit $m \succ_a n$ genau dann, wenn $m = 2n$.

(b) $(\mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}, \succ_b)$ mit $k \succ_b l$ genau dann, wenn $k = |l| :: l$. Dabei ist $|l|$ die Länge der Liste l.

(c) $(\mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}, \succ_c)$ mit $k \succ_c l$ genau dann, wenn $k = n :: k'$ und $l = m :: l'$ mit $n > m$ für $k', l' \in \mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}$.

(d) $(M, \succ_d)$ mit $m \succ_d n$ für alle $m, n \in M$.

(e) $(M, =)$

Lösungsvorschlag

(a) $min_{\succ_a}(M) = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ist ungerade}\}$
$|pre_{\succ_a}(m)| = 1$ für alle $m \in min_{\succ_a}(M)$

(b) $min_{\succ_b}(M) = \{k \in \mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}} \mid k = \emptyset \vee (k = n :: k' \wedge n \neq |k| - 1)\}$
$|pre_{\succ_b}(m)| = 1$ für alle $k \in \mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}}$

(c) $min_{\succ_c}(M) = \{k \in \mathcal{C}_{\texttt{list[}\mathbb{N}\texttt{]}} \mid k = \emptyset \vee k = 0 :: k'\}$
$|pre_{\succ_c}(m)| = \infty$

(d) $min_{\succ_d}(M) = \emptyset$
$|pre_{\succ_d}(m)| = |M|$

(e) $min_{\succ_e}(M) = \emptyset$
$|pre_{\succ_e}(m)| = 1$

Aufgabe 3.2 (Fundierte Mengen) (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

(a) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \succ_a)$ mit $(x_1, x_2) \succ_a (y_1, y_2)$ genau dann, wenn $y_1 > x_1$, $x_2 > y_1$ und $x_2 + 1 > y_2$, ist fundiert.

Lösungsvorschlag

Sei $\langle (n_i, m_i) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Kette mit $(n_i, m_i) \succ_a (n_{i+1}, m_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit $n_{i+1} > n_i$ und $m_i > n_{i+1}$ folgt $m_i > n_i$. Wegen $m_i + 1 > m_{i+1}$, also $m_i \geq m_{i+1}$ ist auch $m_0 \geq m_i > n_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit kann jedoch keine unendliche Kette existieren, da es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m_0 > n$ gibt. Die Aussage ist also wahr.

(b) Seien $(M, \succ_1)$ und $(M, \succ_2)$ fundierte Mengen, dann ist $(M, \succ_1 \cap \succ_2)$ eine fundierte Menge.

Lösungsvorschlag

Da jede Kette in $\succ_1 \cap \succ_2$ auch eine Kette in $\succ_1$ (und $\succ_2$) ist, kann es keine unendliche Kette geben, da $\succ_1$ (und $\succ_2$) damit nicht fundiert wäre(n). Die Aussage ist also wahr.

(c) Seien $(M, \succ_1)$ und $(M, \succ_2)$ fundierte Mengen, dann ist $(M, \succ_1 \cup \succ_2)$ eine fundierte Menge.

Lösungsvorschlag

Sei $M = \{0, 1\}$, $\succ_1 = \{(0, 1)\}$ und $\succ_2 = \{(1, 0)\}$, dann sind offenbar sowohl $(M, \succ_1)$ als auch $(M, \succ_2)$ fundiert. Aber $(M, \succ_3)$ mit $\succ_3 = \succ_1 \cup \succ_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ist nicht fundiert, denn es gibt die unendlich absteigende Kette $0 \succ_3 1 \succ_3 0 \succ_3 \ldots$, also ist die Aussage falsch.

(d) Sei $(M, \succ)$ eine nicht fundierte Menge, dann ist $(M, M^2 \setminus \succ)$ eine fundierte Menge.

Lösungsvorschlag

Die Menge $(\{0, 1\}, \{(0, 0)\})$ ist nicht fundiert, aber auch $(\{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\})$ ist nicht fundiert, also ist die Aussage falsch.

Aufgabe 3.3 (Strukturelle Ordnung)(9 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Datentypen `struc` jeweils die Relationenbeschreibung $R_{\texttt{struc}}$ an.

(a)
```
structure L[@A, @B] <=
  nothing,
  prepend(first : @A, rest : @B),
  append(prefix : @B, last : @A)
```

Lösungsvorschlag

$R_{\texttt{L[@A, @B]}} = \{\langle\{?\texttt{nothing(u)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{?\texttt{prepend(u)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{?\texttt{append(u)}\}, \emptyset\rangle\}$

(b)
```
structure S <=
  null,
  n(p : S),
  v(s : S)
```

Lösungsvorschlag

$R_{\texttt{L[@A, @B]}} = \{\langle\{?\texttt{null(u)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{?\texttt{n(u)}\}, \{\{\texttt{u/p(u)}\}\}\rangle, \langle\{?\texttt{v(u)}\}, \{\{\texttt{u/s(u)}\}\}\rangle\}$

(c)
```
structure T[@A] <=
  leaf(get : @A),
  two(left : T[@A], right : T[@A]),
  three(first : T[@A], second : T[@A], third : T[@A])
```

Lösungsvorschlag

$$R_{\texttt{L[@A, @B]}} = \{\langle\{?\texttt{leaf(u)}\}, \emptyset\rangle, \langle\{?\texttt{two(u)}\}, \{\{\texttt{u/left(u)}\}, \{\texttt{u/right(u)}\}\}\rangle, \\ \langle\{?\texttt{three(u)}\}, \{\{\texttt{u/first(u)}\}, \{\texttt{u/second(u)}\}, \{\texttt{u/third(u)}\}\}\rangle\}$$

Aufgabe 3.4 (Rekursion und Induktion) (13 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Prozeduren p:

(a)
```
function a(x : ℕ, y : ℕ) : ℕ <=
if ?0(x)
  then ⁺(y)
  else if ?0(y)
         then a(⁻(x), 1)
         else a(⁻(x), a(x, ⁻(y)))
       end_if
end_if
```

(b)
```
function b(x : ℕ, y : ℕ) : list[ℕ] <=
if x > y
  then ∅
  else x :: b(⁺(x), y)
end_if
```

(c)
```
function c(x : ℕ, y : ℕ) : ℕ <=
c(y, x)
```

(d)
```
function d(x : list[@I], y : list[@I]) : ℕ <=
if ?∅(x)
  then 0
  else if ?∅(y)
          then ⁺(d(tl(x), hd(x) :: y))
          else c(d(x, tl(y)), d(tl(y), x))
       end_if
end_if
```

- Geben Sie zu jeder Prozedur p die zusammengesetzte Relationenbeschreibung $R_{\mathtt{p}}$ an.
- Geben Sie zu jeder Prozedur p das Induktionsaxiom $IndAx_{\mathtt{p(x,y)=p(y,x)},R_{\mathtt{p}}}$ an.

Lösungsvorschlag

$$
\begin{aligned}
R_a = \{&\langle\{\texttt{?0(x)}\},\emptyset\rangle,\\
&\langle\{\neg\texttt{?0(x)},\texttt{?0(y)}\},\{\{\texttt{x}/^{-}\texttt{(x)},\texttt{y/1}\}\}\rangle,\\
&\langle\{\neg\texttt{?0(x)},\neg\texttt{?0(y)}\},\{\{\texttt{x}/^{-}\texttt{(x)},\texttt{y/a(x,}\,^{-}\texttt{(y))}\},\{\texttt{x/x},\texttt{y}/^{-}\texttt{(y)}\}\}\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IndAx_{\texttt{a(x,y)=a(y,x)},R_a} =& \forall x,y:\mathbb{N}\ \texttt{?0}(x)\equiv\texttt{true}\Rightarrow a(x,y)=a(y,x)\equiv\texttt{true}\\
&\wedge\forall x,y:\mathbb{N}\ \neg\texttt{?0}(x)\equiv\texttt{true}\wedge\texttt{?0}(y)\equiv\texttt{true}\wedge a(^{-}(x),1)=a(1,^{-}(x))\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\Rightarrow a(x,y)=a(y,x)\equiv\texttt{true}\\
&\wedge\forall x,y:\mathbb{N}\ \neg\texttt{?0}(x)\equiv\texttt{true}\wedge\neg\texttt{?0}(y)\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\wedge a(^{-}(x),a(x,^{-}(y)))=a(a(x,^{-}(y)),^{-}(x))\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\wedge a(x,^{-}(y))=a(^{-}(y),x)\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\Rightarrow a(x,y)=a(y,x)\equiv\texttt{true}\\
\Rightarrow&\forall x,y:\mathbb{N}\ a(x,y)=a(y,x)\equiv\texttt{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_b = \{&\langle\{\texttt{x > y}\},\emptyset\rangle,\\
&\langle\{\neg\texttt{x > y}\},\{\{\texttt{x}/^{+}\texttt{(x)}\}\}\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IndAx_{\texttt{b(x,y)=b(y,x)},R_b} =& \forall x,y:\mathbb{N}\ x>y\equiv\texttt{true}\Rightarrow b(x,y)=b(y,x)\\
&\wedge\forall x,y:\mathbb{N}\ \neg x>y\equiv\texttt{true}\wedge b(^{+}(x),y)=b(y,^{+}(x))\equiv\texttt{true}\Rightarrow b(x,y)=b(y,x)\\
\Rightarrow&\forall x,y:\mathbb{N}\ b(x,y)=b(y,x)\equiv\texttt{true}
\end{aligned}
$$

$$
R_c = \{\langle\{\texttt{true}\},\{\texttt{x/y},\texttt{y/x}\}\rangle\}
$$

$$
\begin{aligned}
IndAx_{\texttt{c(x,y)=c(y,x)},R_c} =& \forall x,y:\mathbb{N}\ \texttt{true}\equiv\texttt{true}\wedge c(y,x)=c(x,y)\equiv\texttt{true}\Rightarrow c(x,y)=c(y,x)\equiv\texttt{true}\\
\Rightarrow&\forall x,y:\mathbb{N}\ c(x,y)=c(y,x)\equiv\texttt{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_d = \{&\langle\{\texttt{?}\emptyset\texttt{(x)}\},\emptyset\rangle,\\
&\langle\{\neg\texttt{?}\emptyset\texttt{(x)},\texttt{?}\emptyset\texttt{(y)}\},\{\{\texttt{x/tl(x)},\texttt{y/hd(x)}::\texttt{y}\}\}\rangle,\\
&\langle\{\neg\texttt{?}\emptyset\texttt{(x)},\neg\texttt{?}\emptyset\texttt{(y)}\},\{\{\texttt{x/x},\texttt{y/tl(y)}\},\{\texttt{x/tl(y)},\texttt{y/x}\}\}\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IndAx_{\texttt{d(x,y)=d(y,x)},R_d} =& \forall x,y:\texttt{list[@I]}\ \texttt{?}\emptyset(x)\equiv\texttt{true}\Rightarrow d(x,y)=d(y,x)\\
&\wedge\forall x,y:\texttt{list[@I]}\ \neg\texttt{?}\emptyset(x)\equiv\texttt{true}\wedge\texttt{?}\emptyset(y)\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\wedge d(tl(x),hd(x)::y)=d(hd(x)::y,tl(x))\equiv\texttt{true}\Rightarrow d(x,y)=d(y,x)\equiv\texttt{true}\\
&\wedge\forall x,y:\texttt{list[@I]}\ \neg\texttt{?}\emptyset(x)\equiv\texttt{true}\wedge\neg\texttt{?}\emptyset(y)\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\wedge d(x,tl(y))=d(tl(y),x)\equiv\texttt{true}\wedge d(tl(y),x)=d(x,tl(y))\equiv\texttt{true}\\
&\qquad\Rightarrow d(x,y)=d(y,x)\equiv\texttt{true}\\
\Rightarrow&\forall x,y:\texttt{list[@I]}\ d(x,y)=d(y,x)\equiv\texttt{true}
\end{aligned}
$$